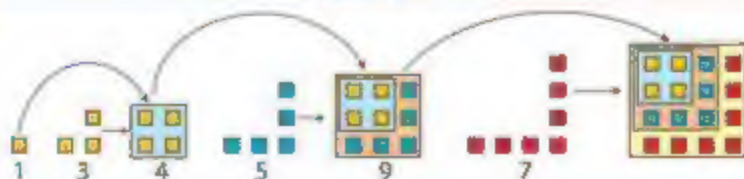
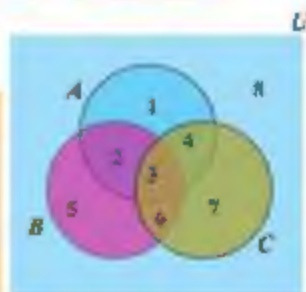
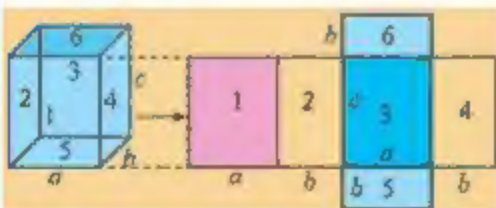


গণিত

দাখিল অষ্টম শ্রেণি



জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড কর্তৃক ২০১৩ শিক্ষাবর্ষ থেকে
দাখিল অষ্টম শ্রেণির পাঠ্যপুস্তকরূপে নির্ধারিত

গণিত

দাখিল
অষ্টম শ্রেণি

২০২৫ শিক্ষাবর্ষের জন্য পরিমার্জিত

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড

৬৯-৭০, মতিঝিল বাণিজ্যিক এলাকা, ঢাকা-১০০০

কর্তৃক প্রকাশিত

[প্রকাশক কর্তৃক সর্বস্বত্ব সংরক্ষিত]

প্রথম সংস্করণ রচনা ও সম্পাদনা

ড. মোঃ আবদুল মতিন

ড. আব্দুস হামাদ

সালেহ মতিন

ড. অমল হালদার

ড. অমূল্য চন্দ্র মন্ডল

শেখ কুতুবউদ্দিন

হামিদা বানু বেগম

এ.কে.এম. শহীদুল্লাহ

মোঃ শাহজাহান সিরাজ

প্রথম প্রকাশ : সেপ্টেম্বর ২০১২

পরিমার্জিত সংস্করণ : সেপ্টেম্বর ২০১৪

পরিমার্জিত সংস্করণ : অক্টোবর ২০২৪

গণপ্রজাতন্ত্রী বাংলাদেশ সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য

মুদ্রণে:

প্রসঙ্গ কথা

বর্তমানে প্রাতিষ্ঠানিক শিক্ষার উপযোগ বহুমাত্রিক। শুধু জ্ঞান পরিবেশন নয়, দক্ষ মানবসম্পদ গড়ে তোলার মাধ্যমে সমৃদ্ধ জাতিগঠন এই শিক্ষার মূল উদ্দেশ্য। একই সাথে মানবিক ও বিজ্ঞানমনস্ক সমাজগঠন নিশ্চিত করার প্রধান অবলম্বনও প্রাতিষ্ঠানিক শিক্ষা। বর্তমান বিজ্ঞান ও প্রযুক্তিনির্ভর বিশ্বে জাতি হিসেবে মাথা তুলে দাঁড়াতে হলে আমাদের মানসম্মত শিক্ষা নিশ্চিত করা প্রয়োজন। এর পাশাপাশি শিক্ষার্থীদের দেশপ্রেম, মূল্যবোধ ও নৈতিকতার শক্তিতে উজ্জীবিত করে তোলাও জরুরি।

শিক্ষা জাতির মেরুদণ্ড আর প্রাতিষ্ঠানিক শিক্ষার প্রাণ শিক্ষাক্রম। আর শিক্ষাক্রম বাস্তবায়নের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ উপকরণ হলো পাঠ্যবই। জাতীয় শিক্ষানীতি ২০১০-এর উদ্দেশ্যসমূহ সামনে রেখে গৃহীত হয়েছে একটি লক্ষ্যাভিসারী শিক্ষাক্রম। এর আলোকে জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড (এনসিটিবি) মানসম্পন্ন পাঠ্যপুস্তক প্রণয়ন, মুদ্রণ ও বিস্তারনের কাজটি নিষ্ঠার সাথে করে যাচ্ছে। সময়ের চাহিদা ও বাস্তবতার আলোকে শিক্ষাক্রম, পাঠ্যপুস্তক ও মূল্যায়নপদ্ধতির পরিবর্তন, পরিমার্জন ও পরিশোধনের কাজটিও এই প্রতিষ্ঠান করে থাকে।

বাংলাদেশের শিক্ষার জরবিন্যাসে মাধ্যমিক জরটি বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ। বইটি এই জরের শিক্ষার্থীদের বয়স, মানসপ্রবণতা ও কৌতূহলের সাথে সংগতিপূর্ণ এবং একইসাথে শিক্ষাক্রমের লক্ষ্য ও উদ্দেশ্য অর্জনের সহায়ক। বিষয়জ্ঞানে সমৃদ্ধ শিক্ষক ও বিশেষজ্ঞগণ বইটি রচনা ও সম্পাদনা করেছেন। আশা করি বইটি বিষয়ভিত্তিক জ্ঞান পরিবেশনের পাশাপাশি শিক্ষার্থীদের মনন ও সৃষ্টিশীলতার বিকাশে বিশেষ ভূমিকা রাখবে।

একশ শতকের এই যুগে জ্ঞান-বিজ্ঞানের বিকাশে গণিতের ভূমিকা অতীব গুরুত্বপূর্ণ। পাশাপাশি ব্যক্তিগত জীবন থেকে শুরু করে পারিবারিক ও সামাজিক জীবনে গণিতের প্রয়োগ অনেক বেড়েছে। এই সব বিষয় বিবেচনায় রেখে মাধ্যমিক পর্যায়ে অষ্টম শ্রেণির গণিত পাঠ্যপুস্তকটি সহজ ও সুন্দরভাবে উপস্থাপন করা হয়েছে এবং বেশ কিছু নতুন বিষয় এতে অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে।

পাঠ্যবই যাতে জবরদস্তিমূলক ও ক্রান্তিকর অনুষ্ঠান না হয়ে উঠে বরং আনন্দাশ্রয়ী হয়ে ওঠে, বইটি রচনার সময় সেদিকে সতর্ক দৃষ্টি রাখা হয়েছে। সর্বশেষ তথ্য-উপাত্ত সহযোগে বিষয়বস্তু উপস্থাপন করা হয়েছে। চেষ্টা করা হয়েছে বইটিকে যথাসম্ভব দুর্য্যোধ্যাতামুক্ত ও স্যবলীল ভাষায় লিখতে। ২০২৪ সালের পরিবর্তিত পরিস্থিতিতে প্রয়োজনের নিরিখে পাঠ্যপুস্তকসমূহ পরিমার্জন করা হয়েছে। এক্ষেত্রে ২০১২ সালের শিক্ষাক্রম অনুযায়ী প্রণীত পাঠ্যপুস্তকের সর্বশেষ সংস্করণকে ভিত্তি হিসেবে গ্রহণ করা হয়েছে। বানানের ক্ষেত্রে বাংলা একাডেমির প্রমিত বানাননীতি অনুসৃত হয়েছে। লগ্নাযজ সতর্কতা অবলম্বনের পরেও তথ্য-উপাত্ত ও ভাষাগত কিছু ত্রুটি থাকতে যাওয়া অসম্ভব নয়। পরবর্তী সংস্করণে বইটিকে যথাসম্ভব ত্রুটিমুক্ত করার আন্তরিক প্রয়াস থাকবে। এই বইয়ের মানোন্নয়নে যে কোনো ধরনের যৌক্তিক পরামর্শ কৃতজ্ঞতার সাথে গৃহীত হবে।

পরিশেষে বইটি রচনা, সম্পাদনা ও অলংকরণে যারা অবদান রেখেছেন তাঁদের সবার প্রতি কৃতজ্ঞতা জানাই।

অক্টোবর ২০২৪

প্রফেসর ড. এ কে এম রিয়াজুল হাসান

চেয়ারম্যান

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

সূচিপত্র

অধ্যায়	শিরোনাম	পৃষ্ঠা
প্রথম	প্যাটার্ন	১-১১
দ্বিতীয়	মুনাকা	১২-২৭
তৃতীয়	পরিমাপ	২৮-৪৬
চতুর্থ	বীজগণিতীয় সূত্রাবলি ও প্রয়োগ	৪৭-৭৪
পঞ্চম	বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ	৭৫-৯৬
ষষ্ঠ	সরল সহসমীকরণ	৯৭-১১৪
সপ্তম	সেট	১১৫-১২৪
অষ্টম	চতুর্ভুজ	১২৫-১৪০
নবম	পিথাগোরাসের উপপাদ্য	১৪১-১৪৭
দশম	বৃত্ত	১৪৮-১৫৮
একাদশ	তথ্য ও উপাত্ত	১৫৯-১৭৪
	উত্তরমালা	১৭৫-১৮৪
	পরিশিষ্ট	১৮৫-২১৬

প্রথম অধ্যায়

প্যাটার্ন

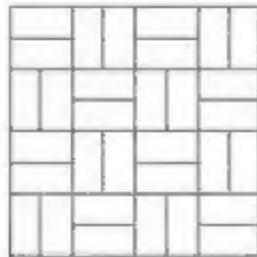
বৈচিত্র্যময় প্রকৃতি নানা রকম প্যাটার্নে ভরপুর। প্রকৃতির এই বৈচিত্র্য আমরা গণনা ও সংখ্যার সাহায্যে উপলব্ধি করি। প্যাটার্ন আমাদের জীবনের সঙ্গে জুড়ে আছে নানা ভাবে। শিশুর লাল-নীল রক আলাদা করা একটি প্যাটার্ন— লালগুলো এদিকে যাবে, নীলগুলো ঐদিকে যাবে। সে গণনা করতে শেষে—সংখ্যা একটি প্যাটার্ন। আবার ৫ এর গুণিতকগুলোর শেষে ০ বা ৫ থাকে, এটিও একটি প্যাটার্ন। সংখ্যা প্যাটার্ন চিনতে পারা— এটি গাণিতিক সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জনের গুরুত্বপূর্ণ অংশ। আবার আমাদের পোশাকে নানা রকম বাহারি নকশা, বিভিন্ন স্থাপনার গায়ে কাব্যকর্মময় নকশা ইত্যাদিতে জ্যামিতিক প্যাটার্ন দেখতে পাই। এ অধ্যায়ে সাংখ্যিক ও জ্যামিতিক প্যাটার্ন বিষয়ে আলোচনা করা হবে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা—

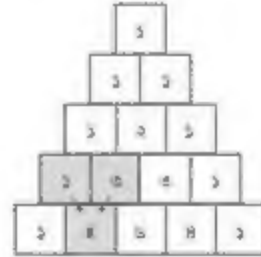
- প্যাটার্ন কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- রৈখিক প্যাটার্ন লিখতে ও বর্ণনা করতে পারবে।
- বিভিন্ন ধরনের জ্যামিতিক প্যাটার্ন লিখতে ও বর্ণনা করতে পারবে।
- আরোপিত শর্তানুযায়ী সহজ রৈখিক প্যাটার্ন লিখতে ও বর্ণনা করতে পারবে।
- রৈখিক প্যাটার্নকে চলকের মাধ্যমে বীজগণিতীয় রাশিমালায় প্রকাশ করতে পারবে।
- রৈখিক প্যাটার্নের নির্দিষ্টতম সংখ্যা বের করতে পারবে।

১.১ প্যাটার্ন

নিচের প্রথম চিত্রের টাইলসগুলো লক্ষ করি। এগুলো একটি প্যাটার্নে সাজানো হয়েছে। এখানে প্রতিটি আড়াআড়ি টাইলস এর পাশের টাইলসটি লম্বালম্বিভাবে সাজানো। সাজানোর এই নিয়মটি একটি প্যাটার্ন সৃষ্টি করেছে।



১ম চিত্র



২য় চিত্র

ফর্ম-০১, গণিত-অষ্টম শ্রেণি (দাখিল)

দ্বিতীয় চিত্রে কতগুলো সংখ্যা ত্রিভুজাকারে সাজানো হয়েছে। সংখ্যাগুলো একটি বিশেষ নিয়ম মেনে নির্বাচন করা হয়েছে। নিয়মটি হলো: প্রতি লাইনের শুরুতে ও শেষে ১ থাকবে এবং অন্য সংখ্যাগুলো উপরের সারির দুইটি পাশাপাশি সংখ্যার যোগফলের সমান। যোগফল সাজানোর এই নিয়ম অন্য একটি প্যাটার্ন সৃষ্টি করেছে।

আবার, ১, ৪, ৭, ১০, ১৩, ... সংখ্যাগুলোতে একটি প্যাটার্ন বিদ্যমান। সংখ্যাগুলো ভালোভাবে লক্ষ করে দেখলে একটি নিয়ম খুঁজে পাওয়া যাবে। নিয়মটি হলো, ১ থেকে শুরু করে প্রতিবার ৩ যোগ করতে হবে। অন্য একটি উদাহরণ: ২, ৪, ৮, ১৬, ৩২, ... প্রতিবার দ্বিগুণ হচ্ছে।

১.২ স্বাভাবিক সংখ্যার প্যাটার্ন

মৌলিক সংখ্যা নির্ণয়

আমরা জানি যে, ১-এর চেয়ে বড় যে সব সংখ্যার ১ ও সংখ্যাটি ছাড়া অন্য কোনো গুণনীয়ক নেই, সেগুলো মৌলিক সংখ্যা। ইরাতোস্থিনিস (Eratosthenes) ছাঁকনির সাহায্যে সহজেই মৌলিক সংখ্যা নির্ণয় করা যায়। ১ থেকে ১০০ পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো একটি চার্টে লিখি। এবার সবচেয়ে ছোট মৌলিক সংখ্যা ২ চিহ্নিত করি এবং এর গুণিতকগুলো কেটে দেই। এরপর ক্রমান্বয়ে ৩, ৫ এবং ৭ ইত্যাদি মৌলিক সংখ্যার গুণিতকগুলো কেটে দিই। তালিকায় যে সংখ্যাগুলো টিকে রইল সেগুলো মৌলিক সংখ্যা।

১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯	১০
১১	১২	১৩	১৪	১৫	১৬	১৭	১৮	১৯	২০
২১	২২	২৩	২৪	২৫	২৬	২৭	২৮	২৯	৩০
৩১	৩২	৩৩	৩৪	৩৫	৩৬	৩৭	৩৮	৩৯	৪০
৪১	৪২	৪৩	৪৪	৪৫	৪৬	৪৭	৪৮	৪৯	৫০
৫১	৫২	৫৩	৫৪	৫৫	৫৬	৫৭	৫৮	৫৯	৬০
৬১	৬২	৬৩	৬৪	৬৫	৬৬	৬৭	৬৮	৬৯	৭০
৭১	৭২	৭৩	৭৪	৭৫	৭৬	৭৭	৭৮	৭৯	৮০
৮১	৮২	৮৩	৮৪	৮৫	৮৬	৮৭	৮৮	৮৯	৯০
৯১	৯২	৯৩	৯৪	৯৫	৯৬	৯৭	৯৮	৯৯	১০০

সংখ্যা শ্রেণির নির্দিষ্ট সংখ্যা নির্ণয়

উদাহরণ ১। সংখ্যাগুলোর পরবর্তী দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর: ৩, ১০, ১৭, ২৪, ৩১, ...

সমাধান: প্রদত্ত সংখ্যাগুলো

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 10 & 17 & 24 & 31 & \dots \\ & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \\ & 7 & 7 & 7 & 7 & \end{array}$$

পাশাপাশি দুইটি সংখ্যার পার্থক্য

লক্ষ করি, প্রতিবার পার্থক্য ৭। অতএব, পরবর্তী দুইটি সংখ্যা হবে যথাক্রমে $31+7=38$ ও $38+7=45$ ।

উদাহরণ ২। সংখ্যাগুলোর পরবর্তী সংখ্যাটি নির্ণয় কর : ১, ৪, ৯, ১৬, ২৫, ...

সমাধান : প্রদত্ত সংখ্যাগুলো

$$\begin{array}{ccccccc} ১, & ৪, & ৯, & ১৬, & ২৫, & \dots \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \\ ৩ & ৫ & ৭ & ৯ & & \end{array}$$

পাশাপাশি দুইটি সংখ্যার পার্থক্য

লক্ষ করি, প্রতিবার পার্থক্য ২ করে বাড়ছে। অতএব, পরবর্তী সংখ্যা হবে $২৫ + (৯ + ২) = ২৫ + ১১ = ৩৬$ ।

উদাহরণ ৩। সংখ্যাগুলোর পরবর্তী সংখ্যাটি নির্ণয় কর : ১, ৫, ৬, ১১, ১৭, ২৮, ...

সমাধান : প্রদত্ত সংখ্যাগুলো

$$\begin{array}{ccccccc} ১, & ৫, & ৬, & ১১, & ১৭, & ২৮, & \dots \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \\ ৬ & ১১ & ১৭ & ২৮ & ৪৫ & \dots \end{array}$$

পাশাপাশি দুইটি সংখ্যার যোগফল

প্রদত্ত সংখ্যাগুলো একটি প্যাটার্নে লেখা হয়েছে। পরপর দুইটি সংখ্যার যোগফল পরবর্তী সংখ্যাটির সমান। অতএব, পরবর্তী সংখ্যাটি হবে $১৭ + ২৮ = ৪৫$ ।

কাজ :

১। ০, ১, ১, ২, ৩, ৫, ৮, ১৩, ২১, ৩৪, ... সংখ্যাগুলোকে ফিবোনাচ্চি সংখ্যা বলা হয়। সংখ্যাগুলোতে কোনো প্যাটার্ন দেখতে পাও কি ?

লক্ষ কর : ২ পাওয়া যায় এর পূর্ববর্তী দুইটি সংখ্যা যোগ করে $(১+১)$

৩ " " " " দুইটি " " " $(১+২)$

২১ " " " " দুইটি " " " $(৮+১৩)$

পরবর্তী দশটি ফিবোনাচ্চি সংখ্যা বের কর।

স্বাভাবিক ক্রমিক সংখ্যার যোগফল নির্ণয়

স্বাভাবিক ক্রমিক সংখ্যার যোগফল বের করার একটি চমৎকার সূত্র রয়েছে। আমরা সহজেই সূত্রটি বের করতে পারি।

মনে করি, ১ থেকে ১০ পর্যন্ত ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যাগুলোর যোগফল ক।

$$\text{অর্থাৎ, } ক = ১ + ২ + ৩ + ৪ + ৫ + ৬ + ৭ + ৮ + ৯ + ১০$$

লক্ষ করি, প্রথম ও শেষ পদের যোগফল $১ + ১০ = ১১$, দ্বিতীয় ও শেষ পদের আগের পদের যোগফলও $২ + ৯ = ১১$ ইত্যাদি। একই যোগফলের প্যাটার্ন অনুসরণ করে ৫ জোড়া সংখ্যা পাওয়া গেল। সুতরাং যোগফল $১১ \times ৫ = ৫৫$ । এ থেকে স্বাভাবিক ক্রমিক সংখ্যার যোগফল বের করার একটি কৌশল পাওয়া গেল।

কৌশলটি হলো :

প্রদত্ত যোগফলের সাথে সংখ্যাগুলো বিপরীত ক্রমে লিখে যোগ করে পাই

$$ক = ১ + ২ + ৩ + ৪ + ৫ + ৬ + ৭ + ৮ + ৯ + ১০$$

$$ক = ১০ + ৯ + ৮ + ৭ + ৬ + ৫ + ৪ + ৩ + ২ + ১$$

$$২ক = (১+১০) + (২+৯) + ... + (৯+২) + (১০+১)$$

$$বা, ২ক = (১+১০) \times ১০$$

$$বা, ক = \frac{(১+১০) \times ১০}{২} = \frac{১১ \times ১০}{২} = ৫৫$$

$$\therefore \text{যোগফল} = \frac{(\text{প্রথম সংখ্যা} + \text{শেষ সংখ্যা}) \times \text{পদ সংখ্যা}}{২}$$

কাজ:

১ থেকে ১৫ পর্যন্ত ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যাগুলোর যোগফল বের করে সূত্র প্রতিষ্ঠা কর।

প্রথম দশটি বিজোড় সংখ্যার যোগফল নির্ণয়

প্রথম দশটি বিজোড় সংখ্যার যোগফল কত? ক্যালকুলেটরের সাহায্যে সহজেই যোগফল পাই, ১০০।

$$১ + ৩ + ৫ + ৭ + ৯ + ১১ + ১৩ + ১৫ + ১৭ + ১৯ = ১০০$$

এভাবে প্রথম পঞ্চাশটি বিজোড় সংখ্যার যোগফল বের করা সহজ হবে না। বরং এ ধরনের যোগফল নির্ণয়ের জন্য কার্যকর গাণিতিক সূত্র তৈরি করি। ১ থেকে ১৯ পর্যন্ত বিজোড় সংখ্যাগুলো লক্ষ করলে দেখা যায়, $১ + ১৯ = ২০$, $৩ + ১৭ = ২০$, $৫ + ১৫ = ২০$ ইত্যাদি। এরকম ৫ জোড়া সংখ্যা পাওয়া যায় যাদের প্রত্যেক জোড়ার যোগফল ২০। সুতরাং, সংখ্যাগুলোর যোগফল $৫ \times ২০ = ১০০$ ।

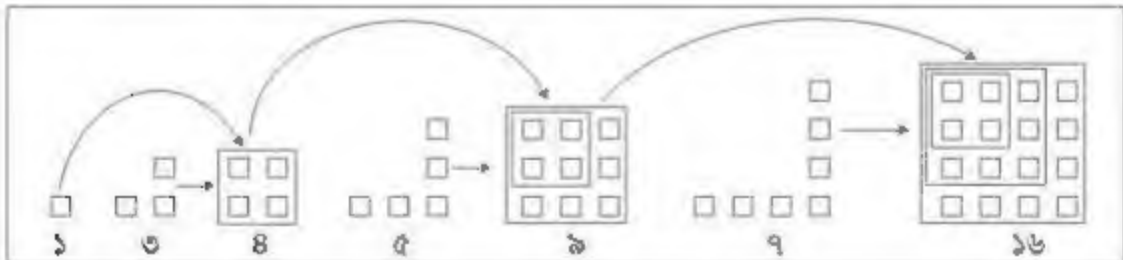
আমরা লক্ষ করি,

$$১ + ৩ = ৪, \quad \text{একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা}$$

$$১ + ৩ + ৫ = ৯, \quad \text{একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা}$$

$$১ + ৩ + ৫ + ৭ = ১৬, \quad \text{একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা, ইত্যাদি।}$$

প্রতিবার যোগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা পাচ্ছি। বিষয়টি জ্যামিতিক প্যাটার্ন হিসেবে সহজেই ব্যাখ্যা করা যায়। ক্ষুদ্রাকৃতির বর্গের সাহায্যে এই যোগফলের প্যাটার্ন লক্ষ করি।



দেখা যাচ্ছে যে প্রথম দুইটি ক্রমিক বিজোড় সংখ্যার যোগের বেলায় প্রত্যেক পাশে ২টি করে ছোট বর্গ বসানো হয়েছে। আবার, প্রথম তিনটি ক্রমিক বিজোড় সংখ্যা যোগের বেলায় প্রত্যেক পাশে ৩টি ছোট বর্গ বসানো হয়েছে। সুতরাং, ১০টি ক্রমিক বিজোড় সংখ্যা যোগ করলে চিত্রের প্রত্যেক পাশে ১০টি ছোট বর্গ থাকবে। অর্থাৎ, $১০ \times ১০ = ১০^২$ বা ১০০টি বর্গের প্রয়োজন হবে। সাধারণভাবে বলা যায় যে, 'ক' সংখ্যক ক্রমিক স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যার যোগফল $ক^২$ ।

কাজ :

১। যোগফল বের কর: $১ + ৪ + ৭ + ১০ + ১৩ + ১৬ + ১৯ + ২২ + ২৫ + ২৮ + ৩১$

১.৩ সংখ্যাকে দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি রূপে প্রকাশ

কিছু স্বাভাবিক সংখ্যা রয়েছে যেগুলোকে দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়।

যেমন, $২ = ১^২ + ১^২$

$$৫ = ১^২ + ২^২$$

$$৮ = ২^২ + ২^২$$

$$১০ = ১^২ + ৩^২$$

$$১৩ = ২^২ + ৩^২ \text{ ইত্যাদি।}$$

এভাবে ১ থেকে ১০০ এর মধ্যে ৩৫টি সংখ্যাকে দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের যোগফল হিসেবে প্রকাশ করা যায়। আবার কিছু স্বাভাবিক সংখ্যাকে দুই বা ততোধিক উপায়ে দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়। যেমন,

$$৫০ = ১^২ + ৭^২ = ৫^২ + ৫^২$$

$$৬৫ = ১^২ + ৮^২ = ৪^২ + ৭^২$$

কাজ

১। ১৩০, ১৭০, ১৮৫ কে দুইভাবে দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

২। ৩২৫ কে তিনটি ভিন্ন উপায়ে দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

১৪ ম্যাজিক বর্গ গঠন

(ক) ৩ ক্রমের ম্যাজিক বর্গ

একটি বর্গক্ষেত্রে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর তিন ভাগে ভাগ করে নয়টি ছোট বর্গক্ষেত্র করা হলো প্রতিটি ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রে ১ থেকে ৯ পর্যন্ত ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো এমনভাবে সাজাতে হবে যাতে পাশাপাশি, উপর-নিচ, কোনোকুনি যোগ করলে যোগফল একই হয় এ ক্ষেত্রে ৩ ক্রমের ম্যাজিক সংখ্যা হবে ১৫ সংখ্যাগুলো সাজানোর বিভিন্ন কৌশলের একটি কৌশল হলো কেন্দ্রের ছোট বর্গক্ষেত্রে ৫ সংখ্যা বসিয়ে কর্ণের বরাবর বর্গক্ষেত্রে জোড় সংখ্যাগুলো লিখতে হবে যেন কর্ণ দুইটি বরাবর যোগফল ১৫ হয় কর্ণের সংখ্যাগুলো বাদ দিয়ে বাকি বিজোড় সংখ্যাগুলো এমনভাবে নির্বাচন করতে হবে যেন পাশাপাশি, উপর-নিচ যোগফল ১৫ পাওয়া যায় পাশাপাশি, উপর-নিচ, কোনোকুনি যোগ করে দেখা যায় ১৫ হচ্ছে।

(খ) ৪ ক্রমের ম্যাজিক বর্গ

একটি বর্গক্ষেত্রে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর চার ভাগে ভাগ করে ষোলটি ছোট বর্গক্ষেত্র করা হলো প্রতিটি ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রে ১ থেকে ১৬ পর্যন্ত ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো এমনভাবে সাজাতে হবে যাতে পাশাপাশি, উপর-নিচ, কোনোকুনি যোগ করলে যোগফল একই হয় এ ক্ষেত্রে যোগফল হবে ৩৪ এবং ৩৪ হলো ৪ ক্রমের ম্যাজিক সংখ্যা। সংখ্যাগুলো সাজানোর বিভিন্ন কৌশল রয়েছে একটি কৌশল হলো সংখ্যাগুলো যেকোনো কোনা থেকে আরম্ভ করে ক্রমান্বয়ে পাশাপাশি, উপর-নিচ লিখতে হবে কর্ণের সংখ্যাগুলো বাদ দিয়ে বাকি সংখ্যাগুলো নির্বাচন করতে হবে এবার কর্ণের সংখ্যাগুলো বিপরীত কোনা থেকে লিখি পাশাপাশি, উপর-নিচ, কোনোকুনি যোগ করে দেখা যায়, যোগফল ৩৪ হচ্ছে

১	২	৩	৪
৫	৬	৭	৮
৯	১০	১১	১২
১৩	১৪	১৫	১৬

	২	৩	
৫			৮
৯			১২
	১৪	১৫	

১৬			১৩
	১১	১০	
	৭	৬	
৪			১

১৬	২	৩	১৩
৫	১১	১০	৮
৯	৭	৬	১২
৪	১৪	১৫	১

কাজ :

- ১। ভিন্ন কৌশলে ৪ জনের ম্যাজিক বর্গ গঠন কর।
- ২। দলগতভাবে ৫ জনের ম্যাজিক বর্গ গঠনের চেষ্টা কর।

১.৫ সংখ্যা নিয়ে খেলা

- ১ দুই অঙ্কের যেকোনো সংখ্যা নাও। সংখ্যার অঙ্ক দুইটির স্থান বদল করে প্রাপ্ত নতুন সংখ্যাটির সাথে আগের সংখ্যাটি যোগ কর। যোগফল কে ১১ দ্বারা ভাগ কর। ভাগশেষ হবে শূন্য।
- ২ দুই অঙ্কের যেকোনো সংখ্যার অঙ্ক দুইটির স্থান পরিবর্তন কর। বড় সংখ্যাটি থেকে ছোট সংখ্যাটি বিয়োগ করে বিয়োগফলকে ৯ দ্বারা ভাগ দাও। ভাগশেষ হবে শূন্য।
- ৩ তিন অঙ্কের যেকোনো সংখ্যা নাও। সংখ্যার অঙ্কগুলোকে বিপরীত ক্রমে লিখ। এবার বড় সংখ্যাটি থেকে ছোট সংখ্যাটি বিয়োগ কর। বিয়োগফল ৯৯ দ্বারা ভাগ কর। ভাগশেষ হবে শূন্য।

১.৬ জ্যামিতিক প্যাটার্ন

চিত্রের বর্গগুলো সমান দৈর্ঘ্যের রেখাংশের দ্বারা তৈরি করা হয়। এ রকম কয়কটি অঙ্কের চিত্র লক্ষ করি।

৪	৮	১০	১৩	$৩ক+১$
৬	১১	১৬	২১	$৫ক+১$
৭	১২	১৭	২২	$৫ক+২$

চিত্রগুলো তৈরি করতে কতগুলো রেখাংশ প্রয়োজন এর প্যাটার্ন লক্ষ করি। “ক” সংখ্যক অঙ্ক তৈরির জন্য রেখাংশের সংখ্যা প্রতি প্যাটার্নের শেষে বীজগণিতীয় বাশির সাহায্যে দেখানো হয়েছে।

ক্রমিক নং	ব্রাশি	পদ						
		১ম	২য়	৩য়	৪র্থ	৫ম	১০ম	১০০তম
১	২ক+১	৩	৫	৭	৯	১১	২১	২০১
২	৩ক+১	৪	৭	১০	১৩	১৬	৩১	৩০১
৩	৪ক+১	৫	৯	১৩	১৭	২১	৪১	৪০১
৪	৫ক+১	৬	১১	১৬	২১	২৬	৪৬	৪০৬

উদাহরণ ৪ .

[]

উপরের জ্যামিতিক চিত্রগুলো একটি প্যাটার্ন তৈরি করছে যা সমান দৈর্ঘ্যের কাঠি দিয়ে তৈরি :

क भाषाएनं शुद्धं चित्रं तैत्तिरीयं कथं संपन्नं निर्वह्य कत

খ. প্যাটার্নটি কোন বীজগণিতীয় রাশিকে সম্বর্ণন করে তা যুক্তিসহ উপস্থাপন কর

গ। প্যাটর্নিটর প্রথম পঞ্চাশটি চিত্র তৈরি করাত মোট কতটি কাঠি দরকার হবে তা নির্ণয় কর।

সম্মাধান (ক) উল্লীপদকৰ আৱলোক চতুৰ্থ প্যাটনাৰ্ণটি নিম্নলিখ

III

পড়াশিক্ষাভিত্তিক সম্মান প্রদর্শনার কাঠির সংখ্যা ২১

(খ) ১ম চিত্র কটির সংখ্যা = ৬

$$= 0 \times 3 + 3$$

২৪ চিত্রে কাঠির সংখ্যা = ১১

$$= 20 + 2$$

৩য় চিত্রে কাঠির সংখ্যা = ১৬

$$= 2q + 2$$

$$= 2 \times 9 + 2$$

ঐর্থ চিত্র কাঠির সংখ্যা = ২১

$$= 20 + 2$$

একই ভাবে ক-তম চিত্রে, কাঠির সংখ্যা = $5 \times k + 1$

$$= 75 + 1$$

∴ পার্টনারশিপ (৫ক+১) বীজগণিতিক রাশি দ্বারা প্রকাশ করা যায়

(গ) 'খ' অংশ থেকে পাই

প্যাটার্নটির বীজগাণিতিক রাশি $৫ক+১$

$$\begin{aligned}\therefore ৫০ \text{ তম প্যাটার্নে প্রয়োজনীয় কাঠির সংখ্যা} &= ৫ \times ৫০ + ১ \\ &= ২৫০ + ১ \\ &= ২৫১\end{aligned}$$

এখন, প্যাটার্নগুলোর কাঠির সংখ্যাগুলোর সমষ্টি = $৬+১১+১৬+২১+ \dots + ২৫১$

এখানে, ১ম পদ = ৬

শেষ পদ = ২৫১

পদ সংখ্যা = ৫০

$$\begin{aligned}\therefore \text{সমষ্টি} &= \frac{৬+২৫১}{২} \times ৫০ \quad [\text{সমষ্টি} = \frac{১ম \text{ সংখ্যা} + \text{শেষ সংখ্যা}}{২} \times \text{পদ সংখ্যা}] \\ &= ২৫৭ \times ২৫ \\ &= ৬৪২৫\end{aligned}$$

\therefore ৫০টি প্যাটার্ন তৈরিতে প্রয়োজনীয় কাঠির সংখ্যা ৬৪২৫

অনুশীলনী ১

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১. ৩ ক্রমের ম্যাজিক বর্গ গঠনে—

i. ম্যাজিক সংখ্যা হবে ১৫

ii. কেন্দ্রে ছোট বর্গক্ষেত্রে সংখ্যাটি হবে ৫

iii. ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলোতে ১ থেকে ১৫ পর্যন্ত ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যা বসানো থাকে

নিচের কোলটি সঠিক?

ক) i ও ii

খ) i ও iii

গ) ii ও iii

ঘ) i, ii ও iii

২. নিচের কোন ফলাফলটি ৯ দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা?

ক) $৫২+২৫$

খ) $৫২৭+৭২৫$

গ) $৪১২+২৩৪$

ঘ) $৭৫-৫৭$

৩. ৯৯৯৯ কোন বীজগণিতীয় রাশির শততম পদ?

ক) $৯৯ক+১$

খ) $৯৯ক-১$

গ) $ক২+১$

ঘ) $ক২-১$

৪. 'ক' সংখ্যক ক্রমিক স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যার যোগফল কত?

ক) ক

খ) $২ক-১$

গ) ক২

ঘ) $২ক+১$

ফর্ম-০২, গণিত-অষ্টম শ্রেণি (দাখিল)

৫. ১ থেকে ১০০ এর মধ্যে কতটি সংখ্যাকে দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের যোগফল আকারে প্রকাশ করা যায়? ক) ১০টি খ) ২০টি গ) ৩৫টি ঘ) ৫০টি

নিচের উদ্দীপকের আলোকে ৬ ও ৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

১২	১৯	১৪
১৭	ক	১৩
১৬	১১	১৮

একটি ম্যাট্রিক বর্গ

৬। 'ক' চিহ্নিত স্থানে উপযুক্ত সংখ্যাটি কত?

ক) ৪৫ খ) ২০ গ) ১৫ ঘ) ৩

৭. ম্যাট্রিক বর্গটির ম্যাট্রিক সংখ্যা কত?

ক) ১৫ খ) ৩৪ গ) ৩৫ ঘ) ৪৫

৮. প্রথম তিনটি বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল একটি-

- i. পূর্ণবর্গ সংখ্যা
- ii. বিজোড় সংখ্যা
- iii. মৌলিক সংখ্যা

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

৯. তালিকার পাশাপাশি দুইটি পদের পার্থক্য বের কর এবং পরবর্তী দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর

- ক) ৭, ১২, ১৭, ২২, ২৭, ...
- খ) ৬, ১৭, ২৮, ৩৯, ৫০, ...

১০. নিচের সংখ্যা প্যাটার্নগুলোর মধ্যে কোনো মিল রয়েছে কি?

প্রতিটি তালিকার পরবর্তী সংখ্যা নির্ণয় কর।

- ক) ১, ১, ২, ৩, ৫, ৮, ১৩, ...
- খ) ৪, ৪, ৫, ৬, ৮, ১১, .

১১ নিচের জ্যামিতিক চিত্রগুলো কাঠি দিয়ে তৈরি করা হয়েছে

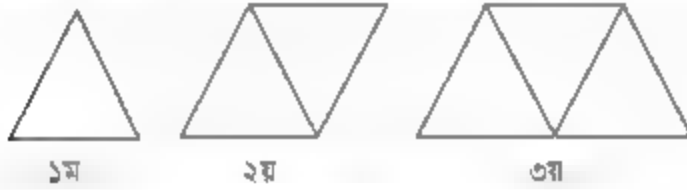


(ক) কাঠির সংখ্যার তালিকা কর।

(খ) তালিকার পরবর্তী সংখ্যাটি কীভাবে বের করবে তা ব্যাখ্যা কর

(গ) কাঠি দিয়ে পরবর্তী চিত্রটি তৈরি কর এবং তোমার উত্তর যাচাই কর

১২ দিয়াশলাইয়ের কাঠি দিয়ে নিচের ত্রিভুজগুলোর প্যাটার্ন তৈরি করা হয়েছে



(ক) চতুর্থ চিত্রে দিয়াশলাইয়ের কাঠির সংখ্যা বের কর

(খ) প্যাটার্নটির পরবর্তী সংখ্যাটি কীভাবে বের করবে তা ব্যাখ্যা কর

(গ) শততম প্যাটার্ন তৈরিতে কতগুলো দিয়াশলাইয়ের কাঠির প্রয়োজন ?

১৩। ৫, ১৩, ২১, ২৯, ৩৭,...

ক. ২৯ ও ৩৭ কে দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর

খ. তালিকার পরবর্তী ৪টি সংখ্যা নির্ণয় কর।

গ. তালিকার প্রথম ৫০টি সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় কর।

দ্বিতীয় অধ্যায়

মুনাফা

এই অধ্যায়ের পূর্বোক্তনীয় প্রজ্ঞান বইয়ের শেষে পরিচালিত ক্রমিক সংগ্রহ আছে। প্রথমে পরিচালিত অংশ লাভ আলোচনা করতে হবে। দৈনন্দিন জীবনে সবাই বেচাকেনা ও কেনেদেনের সাথে জড়িত। কেউ শিল্প প্রতিষ্ঠানে অর্থ বিনিয়োগ করে পণ্য উৎপাদন করেন ও উৎপাদিত পণ্য বাজারে পাইকারীদের নিকট বিক্রয় করেন। আবার পাইকারগণ তাদের ক্রয়কৃত পণ্য বাজারে খুচরা ব্যবসায়ীদের নিকট বিক্রয় করেন। পরিশেষে খুচরা ব্যবসায়ীগণ তাদের ক্রয়কৃত পণ্য সাধারণ ক্রেতাদের নিকট বিক্রয় করেন। প্রত্যেক স্তরে সবাই মুনাফা বা লাভ করতে চান। তবে বিভিন্ন কারণে লোকসান বা ক্ষতিও হতে পারে। যেমন, শেয়ারবাজারে লাভ যেমন আছে, তেমন দরপতনের কারণে ক্ষতিও আছে। আবার আমরা নিম্নাপস্তার স্বার্থে টাকা ব্যাংকে আমানত রাখি। ব্যাংক সেই টাকা বিভিন্ন খাতে বিনিয়োগ করে লাভ বা মুনাফা পায় এবং ব্যাংকও আমানতকারীদের মুনাফা দেয়। তাই সকলেরই বিনিয়োগ ও মুনাফা সম্পর্কে ধারণা থাকা দরকার। এ অধ্যায়ে লাভ, ক্ষতি এবং বিশেষভাবে মুনাফা সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

অধ্যায় শেষে শিখাধীরা –

- মুনাফা কী তা বলতে পারবে।
- সরল মুনাফার হার ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং এ সংক্রান্ত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- চক্রবৃদ্ধি মুনাফার হার ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং এ সংক্রান্ত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- ব্যাংকের হিসাব বিবরণী বুঝতে ও ব্যাখ্যা করতে পারবে।

২.১ লাভ-ক্ষতি

একজন ব্যবসায়ী দোকান ভাড়া, পরিবহন খরচ ও অন্যান্য আনুষঙ্গিক খরচ পণ্যের ক্রয়মূল্যের সাথে যোগ করে প্রকৃত খরচ নির্ধারণ করেন। এই প্রকৃত খরচকে বিনিয়োগ বলে। এই বিনিয়োগকেই লাভ বা ক্ষতি নির্ণয়ের জন্য ক্রয়মূল্য হিসেবে ধরা হয়। আর যে মূল্যে ঐ পণ্য বিক্রয় করা হয় তা বিক্রয়মূল্য। ক্রয়মূল্যের চেয়ে বিক্রয়মূল্য বেশি হলে লাভ বা মুনাফা হয়। আর ক্রয়মূল্যের চেয়ে বিক্রয়মূল্য কম হলে লোকসান বা ক্ষতি হয়। আবার ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্য সমান হলে লাভ বা ক্ষতি কোনোটিই হয় না। লাভ বা ক্ষতি ক্রয়মূল্যের ওপর হিসাব করা হয়।

আমরা লিখতে পারি, লাভ = বিক্রয়মূল্য - ক্রয়মূল্য

ক্ষতি = ক্রয়মূল্য - বিক্রয়মূল্য

উপরের সম্পর্ক থেকে ক্রয়মূল্য বা বিক্রয়মূল্য নির্ণয় করা যায়।

তুলনার জন্য লাভ বা ক্ষতিকো শতকরা হিসেবেও প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ ১। একজন দোকানদার প্রতি হালি ডিম ২৫ টাকা দরে ক্রয় করে প্রতি ২ হালি ৫৬ টাকা দরে বিক্রয় করলে তাঁর শতকরা কত লাভ হবে ?

সমাধান : ১ হালি ডিমের ক্রয়মূল্য ২৫ টাকা

∴ ২ হালি " " " ২৫ × ২ টাকা বা ৫০ টাকা।

যেহেতু ডিমের ক্রয়মূল্য থেকে বিক্রয়মূল্য বেশি, সুতরাং লাভ হবে।

এখানে, লাভ = (৫৬ - ৫০) টাকা বা ৬ টাকা।

৫০ টাকায় লাভ ৬ টাকা

∴ ১ " " ৬ টাকা

∴ ১০০ " " $\frac{৬ \times ১০০}{৫০}$ "

= ১২ টাকা।

∴ লাভ ১২%

উদাহরণ ২ একটি ছাগল ৮% ক্ষতিতে বিক্রয় করা হলো। ছাগলটি আরও ৮০০ টাকা বেশি মূল্যে বিক্রয় করলে ৮% লাভ হতো। ছাগলটির ক্রয়মূল্য নির্ণয় কর।

সমাধান : ছাগলটির ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে, ৮% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য (১০০ - ৮) টাকা বা ৯২ টাকা

আবার, ৮% লাভে বিক্রয়মূল্য (১০০ + ৮) টাকা বা ১০৮ টাকা

∴ বিক্রয়মূল্য বেশি হয় (১০৮ - ৯২) টাকা বা ১৬ টাকা।

বিক্রয়মূল্য ১৬ টাকা বেশি হলে ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

" ১ " " " " $\frac{১০০}{১৬}$ "

" ৮০০ " " " " $\frac{১০০ \times ৮০০}{১৬}$ "

= ৫০০০ টাকা

∴ ছাগলটির ক্রয়মূল্য ৫০০০ টাকা।

কাজ নিচের ধরনে ঘর পূরণ কর			
ক্রয়মূল্য (টাকা)	বিক্রয়মূল্য (টাকা)	লাভ/ক্ষতি	শতকরা লাভ/ক্ষতি
৬০০	৬৬০	লাভ ৬০ টাকা	লাভ ১০%
৬০০	৫৫২	ক্ষতি ৪৮ টাকা	ক্ষতি ৮ %
	৫৮৩	লাভ ৩৩ টাকা	
৮৫৬		ক্ষতি ১০৭ টাকা	
		লাভ ৬৪ টাকা	লাভ ৮%

২.২ মুনাফা

ফরিদা বেগম তাঁর কিছু জমানো টাকা ব্যাংকে রাখার সিদ্ধান্ত নিলেন। তিনি ১০,০০০ টাকা ব্যাংকে আমানত রাখলেন। এক বছর পর ব্যাংকের হিসাব নিতে গিয়ে দেখলেন, তাঁর জমা টাকার পরিমাণ ৭০০ টাকা বৃদ্ধি পেয়ে ১০,৭০০ টাকা হয়েছে। এক বছর পর ফরিদা বেগমের টাকা কীভাবে ৭০০ টাকা বৃদ্ধি গেল?

ব্যাংকে টাকা জমা রাখলে ব্যাংক সেই টাকা ব্যবসা, পুঁজিনির্মাণ ইত্যাদি বিভিন্ন খাতে ঋণ দিয়ে সেখান থেকে মুনাফা করে। ব্যাংক সেখান থেকে অমানতকারীকে কিছু টাকা দেয়। এ টাকাই হচ্ছে আমানতকারীর প্রাপ্ত মুনাফা বা লাভাংশ। আর যে টাকা প্রথমে ব্যাংকে জমা রাখা হয়েছিল তা তাঁর মূলধন বা আসল। কারো কাছে টাকা জমা রাখা বা ঋণ দেওয়া এবং কারো কাছ থেকে টাকা ধার বা ঋণ হিসেবে নেওয়া একটি প্রক্রিয়ার মাধ্যমে সম্পন্ন হয়। এই প্রক্রিয়ায় মূলধন, মুনাফার হার, সময় ও মুনাফার সাথে সম্পর্কিত।

লক্ষ করি :

মুনাফার হার : ১০০ টাকার ১ বছরের মুনাফাকে মুনাফার হার বা শতকরা বার্ষিক মুনাফা বলা হয়।

সময়কাল : যে সময়ের জন্য মুনাফা হিসাব করা হয় তা এর সময়কাল।

সরল মুনাফা : প্রতি বছর শুধু প্রারম্ভিক মূলধনের ওপর যে মুনাফা হিসাব করা হয়, একে সরল মুনাফা (Simple Profit) বলে। শুধু মুনাফা বলতে সরল মুনাফা বোঝায়।

এ অধ্যায়ে আমরা নিচের বীজগণিতীয় প্রতীকগুলো ব্যবহার করব।

মূলধন বা আসল = P (principal)	মুনাফা আসল = আসল + মুনাফা
মুনাফার হার = r (rate of interest)	
সময় = n (time)	অর্থাৎ, $A = P + I$
মুনাফা = I (profit)	এখান থেকে পাই,
সর্বোচ্চ মূলধন বা মুনাফা-আসল = A (Total amount)	$P = A - I$
	$I = A - P$

২.৩ মুনাফা সংক্রান্ত সমস্যা

আসল, মুনাফার হার, সময় ও মুনাফা এই চারটি উপাদানের যেকোনো তিনটি জানা থাকলে বাকি উপাদানটি বের করা যায় নিচে এ সম্পর্কে আলোচনা করা হলো :

(ক) মুনাফা নির্ণয় :

উদাহরণ ৩ রমিজ সাহেব ব্যাংকে ৫০০০ টাকা জমা রাখলেন এবং ঠিক করলেন যে, আগামী ৬ বছর তিনি ব্যাংক থেকে টাকা উঠাবেন না, ব্যাংকের বার্ষিক মুনাফা ১০% হলে, ৬ বছর পর তিনি মুনাফা কত পাবেন? মুনাফা-আসল কত হবে?

সমাধান : ১০০ টাকার ১ বছরের মুনাফা ১০ টাকা

$$\begin{aligned} 1 & \text{ " } 1 & \text{ " } & = \frac{10}{100} \\ 5000 & \text{ " } 1 & \text{ " } & = \frac{10 \times 5000}{100} \\ 5000 & \text{ " } 6 & \text{ " } & = \frac{10 \times 5000 \times 6}{100} \\ & & & = 3000 \text{ টাকা} \end{aligned}$$

∴ মুনাফা-আসল = আসল + মুনাফা

$$= (5000 + 3000) \text{ টাকা}$$

$$= 8000 \text{ টাকা।}$$

∴ মুনাফা ৩০০০ টাকা এবং মুনাফা-আসল ৮০০০ টাকা।

লক্ষ করি : ৫০০০ টাকার ৬ বছরের মুনাফা $\left(5000 \times \frac{10}{100} \times 6 \right)$ টাকা

সূত্র : মুনাফা = আসল \times মুনাফার হার \times সময়, $I = Pm$

মুনাফা-আসল = আসল + মুনাফা, $A = P + I = P + Pm = P(1 + m)$

উদাহরণ ৩-এর বিকল্প সমাধান :

আমরা জানি, $I = Pm$ অর্থাৎ, মুনাফা = আসল \times মুনাফার হার \times সময়

$$\begin{aligned} \therefore \text{মুনাফা} &= 5000 \times \frac{10}{100} \times 6 \text{ টাকা} \\ &= 3000 \text{ টাকা।} \end{aligned}$$

∴ মুনাফা-আসল = আসল + মুনাফা

$$= (5000 + 3000) \text{ টাকা বা } 8000 \text{ টাকা।}$$

∴ মুনাফা ৩০০০ টাকা এবং মুনাফা-আসল ৮০০০ টাকা।

(খ) আসল বা মূলধন নির্ণয় :

উদাহরণ ৪ শতকরা বার্ষিক $৮\frac{১}{২}$ টাকা মুনাফায় কত টাকার ৬ বছরের মুনাফা ২৫৫০ টাকা হবে ?

সমাধান : মুনাফার হার $৮\frac{১}{২}\%$ বা $\frac{১৭}{২}\%$

আমরা জানি, $I = Prn$

$$\text{বা, } P = \frac{I}{rn}$$

$$\begin{aligned} \text{আসল} &= \frac{২৫৫০}{\frac{১৭}{২} \times ৬} \text{ টাকা} \\ &= \frac{৫০১৫০}{১৭ \times ৬} \text{ টাকা} \\ &= \frac{৫০১৫০ \times ১০০}{১৭ \times ৬} \text{ টাকা} \\ &= (৫০ \times ১০০) \text{ টাকা} \\ &= ৫০০০ \text{ টাকা} \end{aligned}$$

যেখানে,

P = আসল = নির্ণেয়

I = মুনাফা = ২৫৫০ টাকা

r = মুনাফার হার = $৮\frac{১}{২}\%$

$$= \frac{১৭}{২ \times ১০০}$$

n = সময় = ৬ বছর

(গ) মুনাফার হার নির্ণয় :

উদাহরণ ৫ শতকরা বার্ষিক কত মুনাফায় ৩০০০ টাকার ৫ বছরের মুনাফা ১৫০০ টাকা হবে ?

সমাধান : আমরা জানি, $I = Prn$

$$\text{বা, } r = \frac{I}{Pn}$$

$$= \frac{১৫০০}{৩০০০ \times ৫}$$

$$\begin{aligned} \text{মুনাফার হার} &= \frac{১৫০০}{৩০০০ \times ৫} = \frac{১}{১০} = \frac{১ \times ১০০}{১০ \times ১০০} = \frac{১০}{১০০} \\ &= ১০\% \end{aligned}$$

মুনাফার হার ১০%

যেখানে

P = আসল = ৩০০০ টাকা

I = মুনাফা = ১৫০০ টাকা

r = মুনাফার হার = নির্ণেয়

n = সময় = ৫ বছর

উদাহরণ ৬। কোনো আসল ৩ বছরে মুনাফা-আসলে ৫৫০০ টাকা হয়, মুনাফা, আসলের $\frac{৩}{৮}$ অংশ হলে, আসল ও মুনাফার হার নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, আসল + মুনাফা = মুনাফা-আসল

$$\text{বা, আসল} + \text{আসলের } \frac{৩}{৮} = ৫৫০০$$

$$\text{বা, } \left(1 + \frac{৩}{৮}\right) \times \text{আসল} = ৫৫০০$$

$$\text{বা, } \frac{১১}{৮} \times \text{আসল} = ৫৫০০$$

$$\begin{aligned} \text{বা, আসল} &= \frac{৫০০ \cdot ৫৫০০ \times ৮}{১১} \text{ টাকা} \\ &= ৪০০০ \text{ টাকা।} \end{aligned}$$

∴ মুনাফা = মুনাফা-আসল - আসল

$$= (৫৫০০ - ৪০০০) \text{ টাকা, বা } ১৫০০ \text{ টাকা}$$

আবার, আমরা জানি, $I = Prn$

$$\text{বা, } r = \frac{I}{Pn}$$

$$\text{মুনাফার হার} = \frac{১৫০০}{৪০০০ \times ৩}$$

$$= \frac{২৫ \cdot ৫০০ \cdot ১৫০০ \times ১}{৪০০০ \cdot ৪০০ \cdot ১} \% \text{ বা } \frac{২৫}{২} \% \text{ বা } ১২\frac{১}{২} \%$$

∴ আসল ৪০০০ টাকা ও মুনাফার হার $১২\frac{১}{২} \%$

(ঘ) সময় নির্ণয় :

উদাহরণ ৭। বার্ষিক ১২% মুনাফায় কত বছরে ১০০০০ টাকার মুনাফা ৪৮০০ টাকা হবে ?

সমাধান : আমরা জানি, $I = Prn$

$$\text{বা, } n = \frac{I}{Pr}$$

ফর্ম্যা-০৩, গণিত-অষ্টম শ্রেণি (দাখিল)

যেখানে,

P - আসল ৪০০০ টাকা

I = মুনাফা = ১৫০০ টাকা

r - মুনাফার হার - নির্ণেয়

n = সময় = ৩ বছর

যেখানে মুনাফা $I = ৪৮০০$ টাকা, মূলধন $P = ১০০০০$ টাকা,

মুনাফার হার $r = ১২\%$, সময় $n = ?$

$$\begin{aligned} \therefore \text{সময়} &= \frac{\text{মুনাফা}}{\text{আসল} \times \text{মুনাফার হার}} \\ &= \frac{৪৮০০}{১০০০০ \times \frac{১২}{১০০}} \text{ বছর} \\ \text{বা, সময়} &= \frac{৪৮০০ \times ১০০}{১০০০০ \times ১২} \text{ বছর} \\ &= ৪ \text{ বছর} \end{aligned}$$

\therefore সময় ৪ বছর

অনুশীলনী ২.১

- ১। একটি পণ্যদ্রব্য বিক্রয় করে পাইকারি বিক্রেতার ২০% এবং খুচরা বিক্রেতার ২০% লাভ হয়। যদি দ্রব্যটির খুচরা বিক্রয়মূল্য ৫৭৬ টাকা হয়, তবে পাইকারি বিক্রেতার ক্রয়মূল্য কত?
- ২। একজন দোকানদার কিছু ডাল ২৩৭৫.০০ টাকায় বিক্রয় করায় তার ৫% ক্ষতি হলো। এই ডাল কত টাকায় বিক্রয় করলে তার ৬% লাভ হতো?
- ৩। ৩০ টাকায় ১০টি দরে ও ১৫টি দরে সমান সংখ্যক কলা ক্রয় করে সবগুলো কলা ৩০ টাকায় ১২টি দরে বিক্রয় করলে শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হবে?
- ৪। বার্ষিক শতকরা মুনাফার হার ১০.৫০ টাকা হলে, ২০০০ টাকার ৫ বছরের মুনাফা কত হবে?
- ৫। বার্ষিক মুনাফা শতকরা ১০ টাকা থেকে কমে ৮ টাকা হলে, ৩০০০ টাকার ৩ বছরের মুনাফা কত কম হবে?
- ৬। বার্ষিক শতকরা মুনাফা কত হলে, ১৩০০০ টাকা ৫ বছরে মুনাফা-আসলে ১৮৮৫০ টাকা হবে?
- ৭। বার্ষিক শতকরা কত মুনাফায় কোনো আসল ৮ বছরে মুনাফা-আসলে দ্বিগুণ হবে?
- ৮। ৬৫০০ টাকা যে হার মুনাফায় ৪ বছরে মুনাফা-আসলে ৮৮৪০ টাকা হয়, এই একই হার মুনাফায় কত টাকা ৪ বছরে মুনাফা-আসলে ১০২০০ টাকা হবে?

- ৯। রিয়াজ সাহেব কিছু টাকা ব্যাংকে জমা রেখে ৪ বছর পর ৪৭৬০ টাকা মুনাফা পান। ব্যাংকের বার্ষিক মুনাফার হার ৮.৫০ টাকা হলে, তিনি ব্যাংকে কত টাকা জমা রেখেছিলেন?
- ১০। শতকরা বার্ষিক মে হারে কোনো মূলধন ৬ বছরে মুনাফা মূলধনে দ্বিগুণ হয়, সেই হারে কত টাকা ৪ বছরে মুনাফা-মূলধনে ২০৫০ টাকা হবে?
- ১১। বার্ষিক শতকরা ৬ টাকা মুনাফায় ৫০০ টাকার ৪ বছরের মুনাফা খণ্ড হয়, বার্ষিক শতকরা ৫ টাকা মুনাফায় কত টাকার ২ বছর ৬ মাসের মুনাফা তত হবে?
- ১২। বার্ষিক মুনাফা ৮% থেকে বেড়ে ১০% হওয়ায় তিশা মারমার আয় ৪ বছরে ১২৮ টাকা বেড়ে গেল। তাঁর মূলধন কত ছিল?
- ১৩। কোনো আসল ৩ বছরে মুনাফা-আসলে ১৫৭৮ টাকা এবং ৫ বছরে মুনাফা-আসলে ১৮৩০ টাকা হয়। আসল ও মুনাফার হার নির্ণয় কর।
- ১৪। বার্ষিক ১০% মুনাফায় ৩০০০ টাকা এবং ৮% মুনাফায় ২০০০ টাকা বিনিয়োগ করলে মোট মূলধনের ওপর গড়ে শতকরা কত টাকা হারে মুনাফা পাওয়া যাবে?
- ১৫। হুদান সাহেব ৩ বছরের জন্য ১০০০০ টাকা এবং ৪ বছরের জন্য ১৫০০০ টাকা ব্যাংক থেকে ঋণ নিয়ে মোট ৯৯০০ টাকা মুনাফা দেন। উভয়ক্ষেত্রে মুনাফার হার সমান হলে, মুনাফার হার নির্ণয় কর।
- ১৬। একই হার মুনাফায় কোনো আসল ৬ বছরে মুনাফা-আসলে দ্বিগুণ হলে, কত বছরে তা মুনাফা-আসলে তিনগুণ হবে?
- ১৭। কোনো নির্দিষ্ট সময়ের মুনাফা-আসল ৫৬০০ টাকা এবং মুনাফা, আসলের $\frac{২}{৫}$ অংশ মুনাফা বার্ষিক শতকরা ৮ টাকা হলে, সময় নির্ণয় কর।
- ১৮। জামিল সাহেব পেনশনের টাকা পেয়ে ১০ লাখ টাকার তিন মাস অন্তর মুনাফা ভিত্তিক ৫ বছর মেয়াদি পেনশনভোগ সঞ্চয়পত্র কিনলেন। বার্ষিক মুনাফা ১২% হলে, তিনি ১ম কিস্তিতে, অর্থাৎ প্রথম ৩ মাস পর কত মুনাফা পাবেন?
- ১৯। একজন ফল ব্যবসায়ী যশোর থেকে ৩৬ টাকায় ১২টি দরে কিছু সংখ্যক এবং কুষ্টিয়া থেকে ৩৬ টাকায় ১৮টি দরে সমান সংখ্যক কলা খরিদ করল। তিনি ৩৬ টাকায় ১৫টি দরে তা বিক্রয় করলেন।
ক. ব্যবসায়ী যশোর থেকে প্রতি একশত কলা কী দরে ক্রয় করেছিল?
খ. সবগুলো কলা বিক্রয় করলে শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হবে?
গ. ২৫% লাভ করতে চাইলে প্রতি হালি কলা কী দরে বিক্রয় করতে হবে?

২০ কোন আসল ৩ বছরে সরল মুনাফাসহ ২৮০০০ টাকা এবং ৫ বছরে সরল মুনাফাসহ ৩০০০০ টাকা

ক প্রতীকগুলোর বর্ণনাসহ মূলধন নির্ণয়ের সূত্রটি লিখ

খ. মুনাফার হার নির্ণয় কর।

গ একই হারে ব্যাংকে কত টাকা জমা রাখলে ৫ বছরের মুনাফা-আসলে ৪৮০০০ টাকা হবে

২.৪ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা : (Compound Profit)

চক্রবৃদ্ধি মুনাফার ক্ষেত্রে প্রতিবছর শেষে মূলধনের সাথে মুনাফা যোগ হয়ে নতুন মূলধন হয়। যদি কোনো আমানতকারী ব্যাংকে ১০০০ টাকা জমা রাখেন এবং ব্যাংক তাঁকে বার্ষিক ১২% মুনাফা দেয়, তবে আমানতকারী বছরান্তে ১০০০ টাকার ওপর মুনাফা পাবেন

$$১০০০ \text{ টাকার } ১২\% \text{ বা } ১০০০ \text{ এর } \frac{১২}{১০০} \text{ টাকা}$$

$$= ১২০ \text{ টাকা।}$$

তখন, ২য় বছরের জন্য তার মূলধন হবে (১০০০ + ১২০) টাকা, বা ১১২০ টাকা, যা তাঁর চক্রবৃদ্ধি মূলধন। ২য় বছরান্তে ১১২০ টাকার ওপর ১২% মুনাফা দেওয়া হবে

$$১১২০ \text{ টাকার } ১২\% = ১১২০ \times \frac{১২}{১০০} \text{ টাকা}$$

$$= \frac{৬৭২}{৫} \text{ টাকা}$$

$$= ১৩৪.৪০ \text{ টাকা}$$

$$\therefore ৩য় বছরের জন্য আমানতকারীর চক্রবৃদ্ধি মূলধন হবে (১১২০ + ১৩৪.৪০) \text{ টাকা}$$

$$= ১২৫৪.৪০ \text{ টাকা।}$$

এভাবে প্রতি বছরান্তে ব্যাংকে আমানতকারীর মূলধন বাড়তে থাকবে। এই বৃদ্ধিপ্রাপ্ত মূলধনকে বলা হয় চক্রবৃদ্ধি মূলধন বা চক্রবৃদ্ধি মূল। আর প্রতি বছর বৃদ্ধিপ্রাপ্ত মূলধনের ওপর যে মুনাফা হিসাব করা হয়, একে বলে চক্রবৃদ্ধি মুনাফা। তবে এ মুনাফা নির্ণয় তিন মাস, ছয় মাস বা এর চেয়ে কম সময়ের জন্যও হতে পারে।

চক্রবৃদ্ধি মূলধন ও মুনাফার সূত্র গঠন :

ধরা যাক, প্রারম্ভিক মূলধন বা আসল P এবং বার্ষিক মুনাফার হার r

∴ ১ম বছরান্তে চক্রবৃদ্ধি মূলধন = আসল + মুনাফা

$$= P + P \times r$$

$$P(1+r)$$

২য় বছরান্তে চক্রবৃদ্ধি মূলধন = ১ম বছরের চক্রবৃদ্ধি মূলধন + মুনাফা

$$P(1+r) + P(1+r) \times r$$

$$P(1+r)(1+r)$$

$$P(1+r)^2$$

৩য় বছরান্তে চক্রবৃদ্ধি মূলধন = ২য় বছরের চক্রবৃদ্ধি মূলধন + মুনাফা

$$P(1+r)^2 + P(1+r)^2 \times r$$

$$P(1+r)^2(1+r)$$

$$= P(1+r)^3$$

লক্ষ করি ১ম বছরান্তে চক্রবৃদ্ধি মূলধনে $(1+r)$ এর সূচক ১

২য় " " " $(1+r)$ এর সূচক ২

৩য় " " " $(1+r)$ এর সূচক ৩

∴ n বছরান্তে চক্রবৃদ্ধি মূলধন হবে $(1+r)$ এর সূচক n

∴ n বছরান্তে চক্রবৃদ্ধি মূলধন C হলে, $C = P(1+r)^n$

আবার, চক্রবৃদ্ধি মুনাফা = চক্রবৃদ্ধি মূলধন - প্রারম্ভিক মূলধন = $P(1+r)^n - P$

সূত্র : চক্রবৃদ্ধি মূলধন $C = P(1+r)^n$

চক্রবৃদ্ধি মুনাফা = $C - P = P(1+r)^n - P$

এখন, চক্রবৃদ্ধি মুনাফা সম্পর্কে আলোচনার উদ্দেশ্যে যে মূলধন ১০০০ টাকা এবং মুনাফা ১২% ধরা হয়েছিল, সেখানে চক্রবৃদ্ধি মূলধনের সূত্র প্রয়োগ করি :

১ম বছরান্তে চক্রবৃদ্ধি মূলধন = $P(1+r)$

$$= ১০০০ \times ১ + \frac{১২}{১০০} \text{ টাকা}$$

$$= ১০০০ \times (১ + ০.১২) \text{ টাকা}$$

$$= ১০০০ \times ১.১২ \text{ টাকা}$$

$$= ১১২০ \text{ টাকা}$$

$$\begin{aligned}
 \text{২য় বছরান্তে চক্রবৃদ্ধি মূলধন} &= P(1+r)^2 \\
 &= 1000 \times \left(1 + \frac{12}{100}\right)^2 \text{ টাকা} \\
 &= 1000 \times (1 + 0.12)^2 \text{ টাকা} \\
 &= 1000 \times (1.12)^2 \text{ টাকা} \\
 &= 1000 \times 1.2544 \text{ টাকা} \\
 &= 1254.40 \text{ টাকা।}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{৩য় বছরান্তে চক্রবৃদ্ধি মূলধন} &= P(1+r)^3 \\
 &= 1000 \times \left(1 + \frac{12}{100}\right)^3 \text{ টাকা} \\
 &= 1000 \times (1 + 0.12)^3 \text{ টাকা} \\
 &= 1000 \times (1.12)^3 \text{ টাকা} \\
 &= 1000 \times 1.404928 \text{ টাকা} \\
 &= 1404.93 \text{ টাকা (প্রায়)।}
 \end{aligned}$$

উদাহরণ ১। বার্ষিক শতকরা ৮ টাকা মুনাফায় ৬২৫০০ টাকার ৩ বছরের চক্রবৃদ্ধি মূলধন নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, $C = P(1+r)^n$

দেওয়া আছে, প্রারম্ভিক মূলধন, $P = ৬২৫০০$ টাকা

বার্ষিক মুনাফার হার, $r = ৮\%$

এবং সময় $n = ৩$ বছর

$$\begin{aligned}
 \therefore C &= 62500 \times \left(1 + \frac{8}{100}\right)^3 \text{ টাকা, বা } 62500 \times \left(\frac{108}{100}\right)^3 \text{ টাকা} \\
 &= 62500 \times (1.08)^3 \text{ টাকা} \\
 &= 62500 \times 1.259712 \text{ টাকা} \\
 &= ৭৮৭৩২ \text{ টাকা} \\
 \therefore \text{চক্রবৃদ্ধি মূলধন } ৭৮৭৩২ \text{ টাকা।}
 \end{aligned}$$

উদাহরণ ২ : বার্ষিক ১০.৫০% মুনাফায় ৫০০০ টাকার ২ বছরের চক্রবৃদ্ধি মুনাফা নির্ণয় কর

সমাধান : চক্রবৃদ্ধি মুনাফা নির্ণয়ের জন্য প্রথমে চক্রবৃদ্ধি মূলধন নির্ণয় করি

আমরা জানি, চক্রবৃদ্ধি মূলধন $C = P(1+r)^n$, যেখানে মূলধন $P = ৫০০০$ টাকা,

$$\text{মুনাফার হার } r = ১০.৫০\% = \frac{১১}{২০০}$$

সময়, $n = ২$ বছর

$$\therefore C = P(1+r)^2$$

$$= ৫০০০ \times \left(1 + \frac{১১}{২০০}\right)^2 \text{ টাকা}$$

$$= ৫০০০ \times \left(\frac{২১১}{২০০}\right)^2 \text{ টাকা}$$

$$= ৫০০০ \times \frac{২১১}{২০০} \times \frac{২১১}{২০০} \text{ টাকা}$$

$$= \frac{৪৮৮৪১}{৮} \text{ টাকা বা } ৬১০৫.১৩ \text{ টাকা (প্রায়)}$$

$$\therefore \text{চক্রবৃদ্ধি মুনাফা} = C - P = P(1+r)^2 - P$$

$$= (৬১০৫.১৩ - ৫০০০) \text{ টাকা}$$

$$= ১১০৫.১৩ \text{ টাকা (প্রায়)}$$

উদাহরণ ৩ : একটি ফ্ল্যাট মালিক কল্যাণ সমিতি আদায়কৃত সার্ভিস চার্জ থেকে উদ্ধৃত ২০০০০০ টাকা ব্যাংকে ছয় মাস অন্তর চক্রবৃদ্ধি মুনাফাভিত্তিক স্থায়ী আমানত রাখলেন। মুনাফার হার বার্ষিক ১২ টাকা হলে, ছয় মাস পর ঐ সমিতির হিসাবে কত টাকা মুনাফা জমা হবে ? এক বছর পর চক্রবৃদ্ধি মূলধন কত হবে ?

সমাধান : দেওয়া আছে, মূলধন $P = ২০০০০০$ টাকা,

মুনাফার হার $r = ১২\%$, সময় $n = ৬$ মাস বা $\frac{১}{২}$ বছর

$$\therefore \text{মুনাফা } I = Prn$$

$$= ২০০০ \times \frac{১২}{১০০} \times \frac{১}{২}$$

$$= ১২০০০ \text{ টাকা}$$

• ৬ মাস পর মুনাফা হবে ১২০০০ টাকা

$$\begin{aligned} ১ম ছয় মাস পর চক্রবৃদ্ধিমূল &= (২০০০০০ + ১২০০০) \text{ টাকা} \\ &= ২১২০০০ \text{ টাকা} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{আবার, পরবর্তী ছয় মাসের মুনাফা-আসল} &= ২১২০০০ \left(1 + \frac{১২}{১০০} \times \frac{১}{২} \right) \text{ টাকা} \\ &= ২১২০০০ \times ১.০৬ \text{ টাকা} \\ &= ২২৪৭২০ \text{ টাকা} \end{aligned}$$

১ বছর পর চক্রবৃদ্ধি মূলধন হবে ২২৪৭২০ টাকা।

উদাহরণ ৪। কোনো শহরের বর্তমান জনসংখ্যা ৮০ লক্ষ। এই শহরের জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার প্রতি হাজারে ৩০ হলে, ৩ বছর পর এই শহরের জনসংখ্যা কত হবে?

সমাধান : শহরটির বর্তমান জনসংখ্যা, $P = ৮০০০০০০$

$$\text{জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার, } r = \frac{৩০}{১০০০} \times ১০০\% = ৩\%$$

সময়, $n = ৩$ বছর।

এখানে জনসংখ্যা বৃদ্ধির ক্ষেত্রে চক্রবৃদ্ধি মূলধনের সূত্র প্রযোজ্য।

$$\begin{aligned} \therefore C &= P(1+r)^n \\ &= ৮০,০০,০০০ \times \left(1 + \frac{৩}{১০০} \right)^3 \text{ জন} \\ &= ৮০,০০,০০০ \times \frac{১০৩}{১০০} \times \frac{১০৩}{১০০} \times \frac{১০৩}{১০০} \text{ জন} \\ &= ৮ \times ১০৩ \times ১০৩ \times ১০৩ \text{ জন} \\ &= ৮৭৪১৮১৬ \text{ জন} \end{aligned}$$

∴ ৩ বছর পর শহরটির জনসংখ্যা হবে ৮৭,৪১,৮১৬ জন

উদাহরণ ৫। মনোয়ারা বেগম তার পারিবারিক প্রয়োজনে ৬% হারে x টাকা এবং ৪% হারে y টাকা ঋণ নিল। সে মোট ৫৬০০০ টাকা ঋণ নিল এবং বছর শেষে ২৮৪০ টাকা মুনাফা শোধ করল।

ক. সম্পূর্ণ ঋণের উপর ৫% মুনাফা প্রযোজ্য হলে বার্ষিক মুনাফা কত?

খ. x এবং y এর মান নির্ণয় কর।

গ. সম্পূর্ণ ঋণের উপর ৫% চক্রবৃদ্ধি মুনাফা প্রযোজ্য হলে ২ বছর পর মনোয়ারা বেগমকে কত টাকা মুনাফা পরিশোধ করতে হবে?

সমাধান : (ক) মোট ঋণের পরিমাণ, $P = ৫৬০০০$ টাকা

মুনাফার হার $r = ৫\%$

সময় $n = ১$ বছর

$$\begin{aligned}\text{এখন মুনাফা } I &= Pnr \\ &= (৫৬০০০ \times ১ \times \frac{৫}{১০০}) \\ &= ২৮০০ \text{ টাকা}\end{aligned}$$

\therefore নির্ণেয় বার্ষিক মুনাফা ২৮০০ টাকা

$$\begin{aligned}\text{(খ) } ৬\% \text{ হার মুনাফায় } x \text{ টাকার বার্ষিক মুনাফা } & (x \times ১ \times \frac{৬}{১০০}) \text{ টাকা} \\ &= \frac{৬x}{১০০} \text{ টাকা}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{আবার } ৮\% \text{ হার মুনাফায় } y \text{ টাকার বার্ষিক মুনাফা } & (y \times ১ \times \frac{৮}{১০০}) \text{ টাকা} \\ &= \frac{৮y}{১০০} \text{ টাকা}\end{aligned}$$

এখন উদ্দীপকের তথ্যানুসারে $x+y = ৫৬০০০ \dots\dots(১)$

$$\begin{aligned}\text{এবং } \frac{৬x}{১০০} + \frac{৮y}{১০০} &= ২৮৮০ \\ \text{বা } ৬x + ৮y &= ২৮৮০০০ \\ \text{বা } ৩x + ২y &= ১৪২০০০ \quad \dots\dots(১১)\end{aligned}$$

এখন, (i) নং সমীকরণকে ৩ দ্বারা গুন করে গুণফল থেকে

$$\begin{array}{rcl}(ii) \text{ নং সমীকরণ বিয়োগ করি } ৩x + ৩y & ১৬৮০০০ \\ ৩x + ২y & ১৪২০০০ \\ \hline y & ২৬০০০\end{array}$$

y এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই $x = ৩০,০০০$

$\therefore x = ৩০,০০০$ এবং $y = ২৬,০০০$

(গ) মনোয়ারার ঋণের পরিমাণ $P = ৫৬,০০০$ টাকা

মুনাফার হার $r = ৫\%$

সময় $n = ২$ বছর

এখন, চক্রবৃদ্ধির ক্ষেত্রে সর্বক্ষমূল $= P(1+r)^n$

$$\begin{aligned} \therefore ২ \text{ বছর পর মনোয়ারার ঋণের সর্বক্ষমূল} &= ৫৬০০০ (1 + \frac{৫}{১০০})^২ \text{ টাকা} \\ &= ৫৬০০০ \times (1.০৫)^২ \text{ টাকা} \\ &= ৫৬০০০ \times (১.০৫)^২ \text{ টাকা} \\ &= ৬১৭৪০ \text{ টাকা} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{মনোয়ারা মুনাফা পরিশোধ করবেন } (৬১৭৪০ - ৫৬০০০) \text{ টাকা} \\ = ৫৭৪০ \text{ টাকা} \end{aligned}$$

অনুশীলনী ২.২

১। ১০৫০ টাকার ৮% নিচের কোনটি ?

ক. ৮০ টাকা খ. ৮২ টাকা গ. ৮৪ টাকা ঘ. ৮৬ টাকা

২। বার্ষিক ১০% সরল মুনাফায় ১২০০ টাকার ৪ বছরের সরল মুনাফা কত ?

ক. ১২০ টাকা খ. ২৪০ টাকা গ. ৩৬০ টাকা ঘ. ৪৮০ টাকা

৩। টাকায় ৫টি দরে ক্রয় করে ৪টি দরে বিক্রয় করলে শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হবে ?

ক) লাভ ২৫% খ) ক্ষতি ২৫% গ) লাভ ২০% ঘ) ক্ষতি ২০%

৪। মুনাফা হিসাবের ক্ষেত্রে-

i. মুনাফা = মুনাফা-আসল - আসল

ii. মুনাফা = $\frac{\text{আসল} \times \text{মুনাফা} \times \text{সময়}}{২}$

iii. চক্রবৃদ্ধি মুনাফা = চক্রবৃদ্ধি মূল-মূলধন

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

৫। ১০% সরল মুনাফায় ২০০০ টাকার

i. ১ বছরের মুনাফা ২০০ টাকা।

ii. ৫ বছরের মুনাফা-আসল, আসলের $১\frac{১}{২}$ গুণ।

iii. ৬ বছরের মুনাফা আসলের সমান হবে।

নিচের কোনটি সঠিক ?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

- ৬ জামিল সাহেব বার্ষিক ১০% মুনাফায় ব্যাংকে ২০০০ টাকা জমা রাখলেন
নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :
- (১) ১ম বছরান্তে মুনাফা-আসল কত হবে ?
- ক. ২০৫০ টাকা খ. ২১০০ টাকা গ. ২২০০ টাকা ঘ. ২২৫০ টাকা
- (২) সরল মুনাফায় ২য় বছরান্তে মুনাফা - আসল কত হবে ?
- ক. ২৪০০ টাকা খ. ২৪২০ টাকা গ. ২৪৪০ টাকা ঘ. ২৪৫০ টাকা
- (৩) ১ম বছরান্তে চক্রবৃদ্ধি মূলধন কত হবে ?
- ক. ২০৫০ টাকা খ. ২১০০ টাকা গ. ২১৫০ টাকা ঘ. ২২০০ টাকা
- ৭। বার্ষিক ১০% মুনাফায় ৮০০০ টাকার ৩ বছরের চক্রবৃদ্ধি মূলধন নির্ণয় কর
- ৮ বার্ষিক শতকরা ১০ টাকা মুনাফায় ৫০০০ টাকার ৩ বছরের সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য কত হবে ?
- ৯ একই হার মুনাফায় কোনো মূলধনের এক বছরান্তে চক্রবৃদ্ধি মূলধন ৬৫০০ টাকা ও দুই বছরান্তে চক্রবৃদ্ধি মূলধন ৬৭৬০ টাকা হলে, মূলধন কত ?
- ১০। বার্ষিক শতকরা ৮.৫০ টাকা চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় ১০০০০ টাকার ২ বছরের চক্রবৃদ্ধি মূলধন ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফা নির্ণয় কর।
- ১১। কোনো শহরের বর্তমান জনসংখ্যা ৬৪ লক্ষ। শহরটির জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার প্রতি হাজারে ২৫ জন হলে, ২ বছর পর ঐ শহরের জনসংখ্যা কত হবে ?
- ১২ এক ব্যক্তি একটি ঋণদান সংস্থা থেকে বার্ষিক ৮% চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় ৫০০০ টাকা ঋণ নিলেন প্রতিবছর শেষে তিনি ২০০০ টাকা করে পরিশোধ করেন। ২য় কিস্তি পরিশোধের পর তাঁর আর কত টাকা ঋণ থাকবে ?
- ১৩ একই হার চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় কোনো মূলধন এক বছরান্তে চক্রবৃদ্ধি মূলধন ১৯৫০০ টাকা এবং দুই বছরান্তে চক্রবৃদ্ধি মূলধন ২০২৮০ টাকা হলো।
- ক. মুনাফা নির্ণয়ের সূত্র লিখ।
- খ. মূলধন নির্ণয় কর।
- গ একই হারে উক্ত মূলধনের জন্য ৩ বছর পর সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য নির্ণয় কর।
- ১৪। আজমল সাহেব কোনো ব্যাংকে ৩০০০ টাকা জমা রেখে ২ বছর পর মুনাফাসহ ৩৬০০ টাকা পেয়েছেন।
- ক. সরল মুনাফার হার নির্ণয় কর।
- খ. আরও ৩ বছর পর মুনাফা-আসল কত হবে ?
- গ ৩০০০ টাকা একই হার চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় জমা রাখলে ২ বছর পর চক্রবৃদ্ধি মূলধন কত হতো ?

তৃতীয় অধ্যায় পরিমাপ

প্রাতিহিক জীবনে ব্যবহৃত বিভিন্ন প্রকার ভোগাপণ্য ও অন্যান্য দ্রব্যের আকার, আকৃতি ও ধরনের ওপর এ পরিমাপ পদ্ধতি নির্ভর করে দৈর্ঘ্য মাপার জন্য, ওজন পরিমাপ করার জন্য ও তরল পদার্থের আয়তন বের করার জন্য ভিন্ন ভিন্ন পরিমাপ পদ্ধতি রয়েছে। ক্ষেত্রফল ও ঘনফল নির্ণয়ের জন্য দৈর্ঘ্য পরিমাপ দ্বারা তৈরি পরিমাপ পদ্ধতি ব্যবহৃত হয়। আবার জনসংখ্যা, পশুপাখি, গাছপালা, নদীনালা, ঘনবাড়ি, যানবাহন ইত্যাদির সংখ্যাও আমাদের জ্ঞানার প্রয়োজন হয়। গণনা করে এগুলো পরিমাপ করা হয়।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- দেশীয়, ব্রিটিশ ও আন্তর্জাতিক পরিমাপ পদ্ধতি ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং সংশ্লিষ্ট পদ্ধতির সাহায্যে দৈর্ঘ্য, ক্ষেত্রফল, ওজন ও তরল পদার্থের আয়তন নির্ণয় সংবলিত সমস্যার সমাধান করতে পারবে।
- দেশীয়, ব্রিটিশ ও আন্তর্জাতিক পদ্ধতিতে দৈনন্দিন জীবনে প্রচলিত পরিমাপকের সাহায্যে পরিমাপ করতে পারবে।

৩.১ পরিমাপ ও এককের পূর্ণতার ধারণা

যেকোনো গণনায় বা পরিমাপে একক প্রয়োজন। গণনার জন্য একক হচ্ছে প্রথম স্বাভাবিক সংখ্যা ১। দৈর্ঘ্য পরিমাপের জন্য একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যকে ১ একক ধরা হয়। অনুরূপভাবে, ওজন পরিমাপের জন্য নির্দিষ্ট কোনো ওজনকে একক ধরা হয়, যাকে ওজনের একক বলে। আবার তরল পদার্থের আয়তন পরিমাপের এককও অনুরূপভাবে বের করা যায়। ক্ষেত্রফল পরিমাপের ক্ষেত্রে ১ একক দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গাকার ক্ষেত্রকে একক ধরা হয়। একে ১ বর্গ একক বলে। তদ্রূপ ১ একক দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট একটি ঘনকের ঘনফলকে ১ ঘন একক বলে। সকলক্ষেত্রেই এককের মাধ্যমে গণনায় বা পরিমাপে সম্পূর্ণ পরিমাপের ধারণা লাভ করা যায়। কিন্তু পরিমাপের জন্য বিভিন্ন দেশে বিভিন্ন একক রয়েছে।

৩.২ মেট্রিক পদ্ধতিতে পরিমাপ

বিভিন্ন দেশে পরিমাপের জন্য বিভিন্ন পরিমাপ পদ্ধতি প্রচলিত থাকায় আন্তর্জাতিক ব্যবসা বাণিজ্যে ও আদান প্রদানে অসুবিধা হয়। তাই ব্যবসা বাণিজ্যে ও আদান প্রদানের ক্ষেত্রে পরিমাপ করার জন্য আন্তর্জাতিক রীতি তথা মেট্রিক পদ্ধতি ব্যবহৃত হয়। এ পরিমাপের বৈশিষ্ট্য হলো এটা দশগুণোত্তর দশমিক ওগুণংশের দ্বারা এ পদ্ধতিতে পরিমাপ সহজে প্রকাশ করা যায়। অষ্টাদশ শতাব্দীতে ফ্রান্সে প্রথম এ পদ্ধতির প্রবর্তন করা হয়।

বাংলাদেশে ১লা জুলাই, ১৯৮২ সাল থেকে মেট্রিক পদ্ধতি চালু করা হয়। এখন দৈর্ঘ্য, ক্ষেত্রফল, ওজন ও তরল পদার্থের আয়তন প্রতিটি পরিমাপেই এ পদ্ধতি পুরোপুরি প্রচলিত রয়েছে।

দৈর্ঘ্য পরিমাপের একক মিটার পৃথিবীর উত্তর মেরু থেকে ফ্রান্সের রাজধানী প্যারিসের দ্রাঘিমা রেখা বরাবর বিষুবরেখা পর্যন্ত দৈর্ঘ্যের কোটি ভাগের এক ভাগকে এক মিটার হিসেবে গণ্য করা হয়। পরবর্তীতে প্যারিস মিউজিয়ামে রক্ষিত এক খণ্ড 'প্লাটিনাম ও ইরিডিয়ামের তৈরি রড'-এর দৈর্ঘ্য এক মিটার হিসেবে স্বীকৃত হয়েছে, এ দৈর্ঘ্যকেই একক হিসেবে ধরে বৈশ্বিক পরিমাপ করা হয়। দৈর্ঘ্যের পরিমাপ ছোট হলে সেন্টিমিটারে এবং বড় হলে কিলোমিটারে প্রকাশ করা হয়। দৈর্ঘ্যের একক মিটার থেকে মেট্রিক পদ্ধতি নামকরণ করা হয়েছে।

ওজন পরিমাপের একক গ্রাম। এটি মেট্রিক পদ্ধতির একক। কম ওজনের বস্তুকে গ্রামে এবং বেশি ওজনের বস্তুকে কিলোগ্রাম (কে.জি.)-এ প্রকাশ করা হয়।

তরল পদার্থের আয়তন পরিমাপের একক লিটার। এটি মেট্রিক পদ্ধতির একক। অল্প আয়তনের তরল পদার্থের পরিমাপে লিটার ও বেশি পরিমাপের জন্য কিলোলিটার ব্যবহার করা হয়।

মেট্রিক পদ্ধতিতে কোনো দৈর্ঘ্যকে নিম্নতর থেকে উচ্চতর অথবা উচ্চতর থেকে নিম্নতর এককে পরিবর্তিত করতে হলে, অঙ্কগুলো পাশাপাশি লিখে দশমিক বিন্দুটি প্রয়োজনমতো বামে বা ডানে সরাতে হবে।

যেমন, ৫ কি. মি. ৪ হে. মি. ৭ ডেকা. মি. ৬ মি. ৯ ডেসি. মি. ২ সে. মি. ৩ মি. মি.

= (৫০০০০০০ + ৪০০০০০ + ৭০০০০ + ৬০০০ + ৯০০ + ২০ + ৩) মি. মি.

= ৫৪৭৬৯২৩ মি. মি. = ৫৪৭৬৯২.৩ সে. মি. = ৫৪৭৬৯.২৩ ডেসি. মি. = ৫৪৭৬.৯২৩ মি.

= ৫৪৭.৬৯২৩ ডেকা. মি. = ৫৪.৭৬৯২৩ হে. মি. = ৫.৪৭৬৯২৩ কি. মি.

আমরা জানি, কোনো দশমিক সংখ্যার কোনো অঙ্কের স্থানীয় মান এর সন্ধিকটবর্তী ডান অঙ্কের স্থানীয় মানের দশ গুণ এবং এর অব্যবহিত বাম অঙ্কের স্থানীয় মানের দশ ভাগের এক ভাগ। মেট্রিক পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্য, ওজন বা আয়তন মাপার ক্রমিক এককগুলোর মধ্যেও একপ সম্মর্ক বিদ্যমান আছে। সুতরাং, মেট্রিক পদ্ধতিতে নিবৃপিত কোনো দৈর্ঘ্য, ওজন বা আয়তনের মাপকে দশমিকের সাহায্যে সহজেই যেকোনো এককে প্রকাশ করা যায়।

নিচে গ্রিক ও ল্যাটিন ভাষা হতে গৃহীত স্থানীয় মানের একটি ছক দেওয়া হলো।

গ্রিক ভাষা হতে গৃহীত					ল্যাটিন ভাষা হতে গৃহীত	
সহস্র	শতক	দশক	একক	দশমাংশ	শতাংশ	সহস্রাংশ
১০০০ কিলো	১০০ হেক্টো	১০ ডেকা	১ মিটার গ্রাম লিটার	$\frac{১}{১০} = .১$ ডেসি	$\frac{১}{১০০} = .০১$ সেন্টি	$\frac{১}{১০০০} = .০০১$ মিলি

গ্রিক ভাষা থেকে গুণিতকবোধক এবং ল্যাটিন ভাষা থেকে অংশবোধক শব্দ এককের নামের পূর্বে উপসর্গ হিসেবে যুক্ত করা হয়েছে।

গ্রিক ভাষায় ডেকা অর্থ ১০ গুণ, হেক্টো অর্থ ১০০ গুণ এবং কিলো অর্থ ১০০০ গুণ। ল্যাটিন ভাষায় ডেসি অর্থ দশমাংশ, সেন্টি অর্থ শতাংশ এবং মিলি অর্থ সহস্রাংশ।

৩.৩ দৈর্ঘ্য পরিমাপের এককাবলি

মেট্রিক পদ্ধতি	ব্রিটিশ পদ্ধতি
১০ মিলিমিটার (মি. মি.) = ১ সেন্টিমিটার (সে. মি.)	১২ ইঞ্চি = ১ ফুট
১০ সেন্টিমিটার = ১ ডেসিমিটার (ডেসি. মি.)	৩ ফুট = ১ গজ
১০ ডেসিমিটার = ১ মিটার (মি.)	১৭৬০ গজ = ১ মাইল
১০ মিটার = ১ ডেকামিটার (ডেকা. মি.)	৬০৮০ ফুট = ১ নটিকেল মাইল
১০ ডেকামিটার = ১ হেক্টোমিটার (হে. মি.)	২২০ গজ = ১ ফার্লং
১০ হেক্টোমিটার = ১ কিলোমিটার (কি. মি.)	৮ ফার্লং = ১ মাইল

দৈর্ঘ্য পরিমাপের একক : মিটার

৩.৪ মেট্রিক ও ব্রিটিশ পরিমাপের সম্পর্ক

১ ইঞ্চি = ২.৫৪ সে. মি. (প্রায়)
 ১ গজ = ০.৯১৪৪ মি. (প্রায়)
 ১ মাইল = ১.৬১ কি. মি. (প্রায়)

১ মিটার = ৩৯.৩৭ ইঞ্চি (প্রায়)
 ১ কি. মি. = ০.৬২ মাইল (প্রায়)

মেট্রিক ও ব্রিটিশ পরিমাপের সম্পর্ক সঠিকভাবে নির্ণয় করা সম্ভব নয়। তাই এ সম্পর্ক আসন্নমান হিসেবে কয়েক দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নিয়ে প্রকাশ করা হয়।

ছোট দৈর্ঘ্য পরিমাপের জন্য স্কেল ব্যবহৃত হয়। বড় দৈর্ঘ্য পরিমাপের জন্য ফিতা ব্যবহার করা হয়। ফিতা ৩০ মিটার বা ১০০ ফুট লম্বা হয়ে থাকে।

কাজ :

- ১ স্কেল দিয়ে তোমার বেক্সটির দৈর্ঘ্য ইঞ্চি ও সেন্টিমিটারে মাপ। এ হতে ১ মিটার সমান কত ইঞ্চি তা নির্ণয় কর।
- ২ উপরের সম্পর্ক হতে ১ মাইল সমান কত কিলোমিটার তা-ও নির্ণয় কর।

উদাহরণ ১ একজন দৌড়বিদ ৪০০ মিটারবিশিষ্ট গোলাকার ট্র্যাকে ২৪ চকর দৌড়ালে সে কত দূরত্ব দৌড়াল ?

সমাধান : ১ চকর দৌড়ালে ৪০০ মিটার হয়।

.. ২৪ চকর দৌড়ালে দূরত্ব হবে (৪০০ × ২৪) মিটার বা ৯৬০০ মিটার বা ৯ কিলোমিটার ৬০০ মিটার
অতএব, দৌড়বিদ ৯ কিলোমিটার ৬০০ মিটার দৌড়াল।

৩.৫ ওজন পরিমাপ

প্রত্যেক বস্তুর ওজন আছে। বিভিন্ন দেশে বিভিন্ন এককের সাহায্যে বস্তু ওজন করা হয়।

ওজন পরিমাপের মেট্রিক এককাবলি

১০ মিলিগ্রাম (মি. গ্রা.)	= ১ সেন্টিগ্রাম (সে. গ্রা.)
১০ সেন্টিগ্রাম	= ১ ডেসিগ্রাম (ডেসিগ্রা.)
১০ ডেসিগ্রাম	= ১ গ্রাম (গ্রা.)
১০ গ্রাম	= ১ ডেকাগ্রাম (ডেকা গ্রা.)
১০ ডেকাগ্রাম	= ১ হেক্টোগ্রাম (হে. গ্রা.)
১০ হেক্টোগ্রাম	= ১ কিলোগ্রাম (কে. জি.)

ওজন পরিমাপের একক : গ্রাম

১ কিলোগ্রাম বা ১ কে জি. = ১০০০ গ্রাম

মেট্রিক পদ্ধতিতে ওজন পরিমাপের জন্য ব্যবহৃত আরও দুইটি একক আছে। অধিক পরিমাণ বস্তুর ওজন পরিমাপের জন্য কুইন্টাল ও মেট্রিক টন একক দুইটি ব্যবহার করা হয়।

১০০ কিলোগ্রাম	= ১ কুইন্টাল
১০০০ কিলোগ্রাম	= ১ মেট্রিক টন

কাজ :

- ১। দাগকাটা ব্যালেন্স দ্বারা ভোমরা ভোমাদের ৫টি বইয়ের ওজন বের কর
- ২। ডিজিটাল ব্যালেন্সের সাহায্যে ভোমাদের ওজন নির্ণয় কর।

উদাহরণ ২। ১ মেট্রিক টন চাল ৬৪ জন শ্রমিকের মধ্যে সমানভাবে ভাগ করে দিলে প্রত্যেকে কী পরিমাণ চাল পাবে ?

সমাধান : ১ মেট্রিক টন = ১০০০ কেজি

৬৪ জন শ্রমিক পায় ১০০০ কেজি চাল

$$\therefore ১ \text{ ,, ,, ,, } \frac{১০০০}{৬৪} \text{ কেজি চাল}$$

$$= ১৫.৬২৫ \text{ কেজি চাল}$$

$$= ১৫ \text{ কেজি } ৬২৫ \text{ গ্রাম চাল}$$

\therefore প্রত্যেক শ্রমিক ১৫ কেজি ৬২৫ গ্রাম চাল পাবে।

৩.৬ তরল পদার্থের আয়তন পরিমাপ

কোনো তরল পদার্থ কোনো ধারকের যতখানি জায়গা নিয়ে থাকে তা এর আয়তন। একটি ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা আছে। কিন্তু কোনো তরল পদার্থের নির্দিষ্টভাবে তা নেই। যে পাত্রের তরল পদার্থ রাখা হয় তা সেই পাত্রের আকার ধারণ করে। যার কারণে তরল পদার্থের আয়তন মাপার জন্য নির্দিষ্ট কোনো ঘনবস্তুর আকৃতির মাপনি বা কাপ ব্যবহার করা হয়। এক্ষেত্রে আমরা সাধারণত লিটার মাপনি ব্যবহার করি। তবে বর্তমান বাজারে মিলিলিটার এককে লেবেলিত নির্দিষ্ট পরিমাপের কাপ, আয়তন মাপক চোঙ, কোণক আকৃতির পাত্র বা সিলিন্ডার আকৃতির মাপ পাওয়া যায় যা ফুড গ্রেড প্লাস্টিক, স্বচ্ছ কাচ, অ্যাকুমিনিয়াম বা টিনের শিট দ্বারা তৈরি থাকে। এছাড়া আন্তর্জাতিকভাবে তরল পদার্থের আয়তন মাপার ক্ষেত্রে গিল, পিন্ট, কোয়ার্ট, গ্যালন, তরল আউন্স ইত্যাদি মাপনিও ব্যবহৃত হয়ে আসছে। সাধারণত দুধ, অ্যালকোহল, তেল এবং অন্যান্য তরল পদার্থ মাপার ক্ষেত্রে উল্লিখিত পাত্রগুলো ব্যবহার করা হয়। ক্রোম্যাটোগ্রাফির সুবিধার্থে বর্তমানে ভোজ্যতেল, খাবার পানি, কোমল পানীয়, মেশিন তেল ইত্যাদি মিলিলিটার বা লিটারে বোতলজাত করে বিক্রি করা হচ্ছে।

তরল পদার্থের আয়তন পরিমাপের মেট্রিক এককাবলি

১০ মিলিলিটার (মি. লি.)	= ১ সেন্টিলিটার (সে. লি.)
১০ সেন্টিলিটার	= ১ ডেসিলিটার (ডেসিলি.)
১০ ডেসিলিটার	= ১ লিটার (লি.)
১০ লিটার	= ১ ডেকালিটার (ডেকালি.)
১০ ডেকালিটার	= ১ হেক্টোলিটার (হে. লি.)
১০ হেক্টোলিটার	= ১ কিলোলিটার (কি. লি.)

তরল পদার্থের আয়তন পরিমাপের একক : লিটার

মন্তব্য : ৪ ডিগ্রি সেলসিয়াস তাপমাত্রায় ১ ঘনসেণ্টিমিটার (Cubic Centimetre) বিশুদ্ধ পানির ওজন ১ গ্রাম Cubic Centimetre কে সংক্ষেপে ইংরেজিতে c c (সি সি) লেখা হয়

১ লিটার বিশুদ্ধ পানির ওজন ১ কিলোগ্রাম

মৈত্রিক এককবলিতে যেকোনো একটি পরিমাপের এককবলি জানা থাকলে অপরগুলো সহজে মনে রাখা যায়। দৈর্ঘ্যের এককবলি জানা থাকলে ওজন ও তরল পদার্থের আয়তন পরিমাপের এককগুলো শুধু মিটারের জায়গায় 'গ্রাম' বা 'লিটার' বসালেই পাওয়া যায়।

কাজ :

- ১ তোমার পানীয়জলের পাত্রের ধারণক্ষমতা কত সি সি পরিমাপ কর এবং তা ঘনইঞ্চিতে প্রকাশ কর
- ২ শিক্ষক কর্তৃক নির্ধারিত অজানা আয়তনের একটি পাত্রের আয়তন অনুমান কর তারপর এর সঠিক আয়তন বের করে ভুলের পরিমাপ নির্ণয় কর।

উদাহরণ ৩। একটি চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য ৩ মিটার, প্রস্থ ২ মিটার ও উচ্চতা ৪ মিটার। এতে কত লিটার এবং কত কিলোগ্রাম বিশুদ্ধ পানি ধরবে?

সমাধান : চৌবাচ্চাটির দৈর্ঘ্য = ৩ মিটার, প্রস্থ = ২ মিটার এবং উচ্চতা = ৪ মিটার

$$\begin{aligned}\therefore \text{চৌবাচ্চাটির আয়তন} &= (৩ \times ২ \times ৪) \text{ ঘন মি.} = ২৪ \text{ ঘন মি.} \\ &= ২৪০০০০০০ \text{ ঘন সে. মি} \\ &= ২৪০০০ \text{ লিটার} \quad [১০০০ \text{ ঘন সে. মি.} = ১ \text{ লিটার}]\end{aligned}$$

১ লিটার বিশুদ্ধ পানির ওজন ১ কিলোগ্রাম।

২৪০০০ লিটার বিশুদ্ধ পানির ওজন ২৪০০০ কিলোগ্রাম।

অতএব, চৌবাচ্চাটিতে ২৪০০০ লিটার বিশুদ্ধ পানি ধরবে এবং এর ওজন ২৪০০০ কিলোগ্রাম

৩.৭ ক্ষেত্রফল পরিমাপ

আয়তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের পরিমাপ = দৈর্ঘ্যের পরিমাপ \times প্রস্থের পরিমাপ

বর্গাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের পরিমাপ = (বাহুর পরিমাপ)^২

ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের পরিমাপ = $\frac{১}{২} \times$ ভূমির পরিমাপ \times উচ্চতার পরিমাপ

ক্ষেত্রফল পরিমাপের একক : বর্গমিটার

ক্ষেত্রফল পরিমাপে মেট্রিক এককাবলি

১০০ বর্গসেন্টিমিটার (ব. সে. মি.)	=	১ বর্গডেসিমিটার (ব. ডেসিমি.)
১০০ বর্গডেসিমিটার	=	১ বর্গমিটার (ব. মি.)
১০০ বর্গমিটার	=	১ এয়র (বর্গডেকামিটার)
১০০ এয়র (বর্গডেকামিটার)	=	১ হেক্টর বা ১ বর্গহেক্টোমিটার
১০০ বর্গহেক্টোমিটার	=	১ বর্গকিলোমিটার

ক্ষেত্রফল পরিমাপে ব্রিটিশ এককাবলি

১৪৪ বর্গইঞ্চি	=	১ বর্গফুট
৯ বর্গফুট	=	১ বর্গগজ
৪৮৪০ বর্গগজ	=	১ একর
১০০ শতক (ডেসিমাল)	=	১ একর

ক্ষেত্রফল পরিমাপে দেশীয় এককাবলি

১ বর্গহাত	=	১ গণা
২০ গণা	=	১ ছটাক
১৬ ছটাক	=	১ কাঠা
২০ কাঠা	=	১ বিনা

ক্ষেত্রফল পরিমাপে মেট্রিক ও ব্রিটিশ পদ্ধতির সম্পর্ক

১ বর্গসেন্টিমিটার	=	০.১৬ বর্গইঞ্চি (প্রায়)
১ বর্গমিটার	=	১০.৭৬ বর্গফুট (প্রায়)
১ হেক্টর	=	২.৪৭ একর (প্রায়)
১ বর্গইঞ্চি	=	৬.৪৫ বর্গসেন্টিমিটার (প্রায়)
১ বর্গফুট	=	৯২৯ বর্গসেন্টিমিটার (প্রায়)
১ বর্গগজ	=	০.৮৪ বর্গমিটার (প্রায়)
১ বর্গমাইল	=	৬৪০ একর

ক্ষেত্রফল পরিমাপে মেট্রিক, ব্রিটিশ ও দেশীয় এককগুলির সম্পর্ক

১ বর্গহাত	=	৩২৪ বর্গইঞ্চি
১ বর্গগজ বা ৪ গজ	=	৯ বর্গফুট = ০.৮৩৬ বর্গমিটার (প্রায়)
১ কাঠা	=	৭২০ বর্গফুট = ৮০ বর্গগজ = ৬৬.৮৯ বর্গমিটার (প্রায়)
১ বিঘা	=	১৬০০ বর্গগজ = ১৩৩৭.৮ বর্গমিটার (প্রায়)
১ একর	=	৩ বিঘা ৮ হটাক = ৪০৪৬.৮৬ বর্গমিটার (প্রায়)
১ শতক	=	৪৩৫ ৬ বর্গফুট = ১০০০ বর্গকড়ি (১০০ কড়ি = ৬৬ ফুট)
১ বর্গমাইল	=	১৯৩৬ বিঘা
১ বর্গমিটার	=	৪ ৭৮ গজ (প্রায়) = ৩.২৩৯ হটাক (প্রায়)
১ এয়র	=	২৩.৯ হটাক (প্রায়)

কাজ :

- ১ স্কেল দিয়ে তোমার একটি বইয়ের ও পড়ার টেবিলের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ ইঞ্চি ও সেন্টিমিটারে মেপে উভয় এককে এদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। এ থেকে ১ বর্গইঞ্চি ও ১ বর্গসেন্টিমিটারের সম্পর্ক বের কর।
- ২ দলগতভাবে তোমরা বেঞ্চ, টেবিল, দরজা, জানালা ইত্যাদির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ স্কেলের সাহায্যে ইঞ্চি ও সেন্টিমিটারে মেপে এগুলোর ক্ষেত্রফল বের কর।

উদাহরণ ৪। ১ ইঞ্চি = ২.৫৪ সেন্টিমিটার এবং ১ একর = ৪৮৪০ বর্গগজ। ১ একরে কত বর্গমিটার?

সমাধান : ১ ইঞ্চি = ২.৫৪ সে. মি.

$$\therefore ৩৬ ইঞ্চি বা ১ গজ = ২.৫৪ \times ৩৬ \text{ সে. মি.}$$

$$= ৯১.৪৪ \text{ সে. মি.}$$

$$= \frac{৯১.৪৪}{১০০} \text{ মিটার} = ০.৯১৪৪ \text{ মিটার}$$

$$\therefore ১ গজ \times ১ গজ = ০.৯১৪৪ \text{ মিটার} \times ০.৯১৪৪ \text{ মিটার}$$

$$\text{বা, } ১ বর্গগজ = ০.৮৩৬১২৭৩৬ \text{ বর্গমিটার}$$

$$\therefore ৪৮৪০ বর্গগজ = ০.৮৩৬১২৭৩৬ \times ৪৮৪০ \text{ বর্গমিটার}$$

$$= ৪০৪৬.৮৫৬৪২২৪০$$

$$= ৪০৪৬.৮৬ \text{ ব. মি. (প্রায়)}$$

$$\therefore ১ একর = ৪০৪৬.৮৬ \text{ ব. মি. (প্রায়)}।$$

উদাহরণ ৫ জাহাঙ্গীরনগর বিশ্ববিদ্যালয় ক্যাম্পাসের এলাকা ৭০০ একর একে নিকটতম পূর্ণসংখ্যক হেক্টরে প্রকাশ কর।

সমাধান : ২.৪৭ একর = ১ হেক্টর

$$\therefore ১ " = \frac{১}{২.৪৭} "$$

$$\therefore ৭০০ " = \frac{১ \times ৭০০ \times ১০০}{২.৪৭} \text{ হেক্টর} = ২৮৩.৪ \text{ হেক্টর}$$

অতএব, নির্ণেয় এলাকা ২৮৩ হেক্টর (প্রায়)।

উদাহরণ ৬। একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ৪০ মিটার এবং প্রস্থ ৩০ মিটার ৩০ সে. মি. ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল কত?

সমাধান : ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য = ৪০ মিটার = (৪০ × ১০০) সে.মি. = ৪০০০ সে. মি.

এবং প্রস্থ = ৩০ মিটার ৩০ সে. মি.

$$= (৩০ \times ১০০) \text{ সে. মি.} + ৩০ \text{ সে. মি.}$$

$$= ৩০৩০ \text{ সে. মি.}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় ক্ষেত্রফল} = (৪০০০ \times ৩০৩০) \text{ বর্গ সে. মি} = ১২১২০০০০ \text{ বর্গ সে. মি}$$

$$= ১২১২ \text{ বর্গমিটার} = ১২ \text{ এর } ১২ \text{ বর্গমিটার।}$$

অতএব, ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল ১২ এর ১২ বর্গমিটার।

৩.৮ আয়তন

ঘনবস্তুর ঘনফলই আয়তন

[আয়তাকার ঘনবস্তুর আয়তনের পরিমাপ = দৈর্ঘ্যের পরিমাপ × প্রস্থের পরিমাপ × উচ্চতার পরিমাপ]

দৈর্ঘ্যের পরিমাপ, প্রস্থের পরিমাপ ও উচ্চতার পরিমাপ একই এককে প্রকাশ করে আয়তনের পরিমাপ ঘন এককে নির্ণয় করা হয় দৈর্ঘ্য ১ সেন্টিমিটার, প্রস্থ ১ সেন্টিমিটার এবং উচ্চতা ১ সেন্টিমিটারবিশিষ্ট বস্তুর আয়তন ১ ঘন সেন্টিমিটার।

আয়তন পরিমাপে মেট্রিক এককাবলি

১০০০ ঘন সেন্টিমিটার (ঘন সে. মি.)	=	১ ঘন ডেসিমিটার (ঘ. ডেসি. মি.)	=	১ লিটার
১০০০ ঘন ডেসিমিটার	=	১ ঘন মিটার (ঘ.মি.)		
১ ঘন মিটার	=	১ স্টের		
১০ ঘন স্টের	=	১ ডেকা স্টের		
১ ঘন সে. মি. (সি.সি.)	=	১ মিলিলিটার	১ ঘনইঞ্চি	= ১৬.৩৯ মিলিলিটার (প্রায়)

আয়তনের মেট্রিক ও ব্রিটিশ এককের সম্পর্ক

১ স্টের	= ৩৫.৩ ঘনফুট (প্রায়)
১ ডেকাস্টের	= ১৩.০৮ ঘনগজ (প্রায়)
১ ঘনফুট	= ২৮.৬৭ লিটার (প্রায়)

কাজ :

- ১ তোমার সবচেয়ে মোটা বইটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা মাপে এর ঘনফল নির্ণয় কর
- ২ শ্রেণিশিক্ষক কর্তৃক নির্ধারিত অজানা আয়তনের একটি বাক্সের আয়তন অনুমান কর তারপর এর সঠিক আয়তন বের করে ভুলের পরিমাণ নির্ণয় কর।

উদাহরণ ৭। একটি বাক্সের দৈর্ঘ্য ২ মিটার, প্রস্থ ১ মিটার ৫০ সে. মি. এবং উচ্চতা ১ মিটার। বাক্সটির আয়তন কত?

সমাধান :

$$\text{দৈর্ঘ্য} = ২ \text{ মিটার} = ২০০ \text{ সে. মি.}$$

$$\text{প্রস্থ} = ১ \text{ মিটার } ৫০ \text{ সে. মি.} = ১৫০ \text{ সে. মি.}$$

$$\text{এবং উচ্চতা} = ১ \text{ মিটার} = ১০০ \text{ সে. মি.}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{বাক্সটির আয়তন} &= \text{দৈর্ঘ্য} \times \text{প্রস্থ} \times \text{উচ্চতা} \\ &= (২০০ \times ১৫০ \times ১০০) \text{ ঘন সে. মি.} \\ &= ৩০০০০০০ \text{ ঘন সে. মি.} \\ &= ৩ \text{ ঘনমিটার} \end{aligned}$$

বিকল্প পদ্ধতি : দৈর্ঘ্য = ২ মিটার, প্রস্থ = ১ মিটার ৫০ সে. মি. = $১\frac{১}{২}$ মিটার এবং উচ্চতা = ১ মিটার

$$\begin{aligned} \therefore \text{বাক্সটির আয়তন} &= \text{দৈর্ঘ্য} \times \text{প্রস্থ} \times \text{উচ্চতা} \\ &= \left(২ \times \frac{৩}{২} \times ১\right) \text{ ঘনমিটার} \\ &= ৩ \text{ ঘনমিটার} \end{aligned}$$

\therefore নির্ণেয় আয়তন ৩ ঘনমিটার।

উদাহরণ ৮। একটি চৌবাচ্চায় ৮০০০ লিটার পানি ধরে। চৌবাচ্চাটির দৈর্ঘ্য ২.৫৬ মিটার এবং প্রস্থ ১.২৫ মিটার হলে, গভীরতা কত?

সমাধান : চৌবাচ্চাটির তলার ক্ষেত্রফল = ২.৫৬ মিটার × ১.২৫ মিটার

$$= ২.৫৬ \text{ সে. মি.} \times ১.২৫ \text{ সে. মি.}$$

$$= ৩২০০০ \text{ বর্গ সে. মি}$$

চৌবাচ্চায় ৮০০০ লিটার বা ৮০০০ × ১০০০ ঘন সে. মি. পানি ধরে [১০০০ ঘন সে. মি = ১ লিটার]

অতএব, চৌবাচ্চাটির আয়তন ৮০০০০০০ ঘন সে. মি

$$\therefore \text{চৌবাচ্চাটির গভীরতা} = \frac{৮০০০০০০}{৩২০০০} \text{ সে. মি.} = ২৫০ \text{ সে. মি.}$$

$$= ২.৫ \text{ মিটার।}$$

বিকল্প পদ্ধতি :

চৌবাচ্চাটির তলার ক্ষেত্রফল = ২.৫৬ মিটার × ১.২৫ মিটার

$$= ৩.২ \text{ বর্গ মি}$$

চৌবাচ্চায় ৮০০০ লিটার বা ৮০০০ × ১০০০ ঘন সে. মি. পানি ধরে :

$$\therefore \text{চৌবাচ্চাটির আয়তন} = \frac{৮০০০ \times ১০০০}{১০০০০০০} \text{ ঘন মি} = ৮ \text{ ঘন মিটার} \quad ১ \text{ ঘন মি} = ১০০০০০০ \text{ ঘন সে. মি.},$$

$$\therefore \text{চৌবাচ্চাটির গভীরতা} = \frac{৮}{৩.২} \text{ মিটার}$$

$$= ২.৫ \text{ মিটার।}$$

উদাহরণ ৯ একটি ঘরের দৈর্ঘ্য প্রস্থের ৩ গুণ। প্রতি বর্গমিটারে ৭.৫০ টাকা দরে ঘরটির মেঝে কার্পেট দিয়ে ঢাকতে মোট ১১০২.৫০ টাকা ব্যয় হয়। ঘরটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান : ৭.৫০ টাকা খরচ হয় ১ বর্গমিটারে

$$\therefore ১ \text{ " " " " } \frac{১}{৭.৫০} \text{ বর্গমিটারে}$$

$$\therefore ১১০২.৫০ \text{ " " " " } \frac{১ \times ১১০২.৫}{৭.৫০} \text{ বর্গমিটারে}$$

$$= ১৪৭ \text{ বর্গমিটারে}$$

অর্থাৎ, ঘরের ক্ষেত্রফল ১৪৭ বর্গমিটার।

মনে করি, প্রস্থ = ক মিটার

$$\text{দৈর্ঘ্য} = ৩ক \text{ মিটার}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{ক্ষেত্রফল} &= (\text{দৈর্ঘ্য} \times \text{প্রস্থ}) \text{ বর্গ একক} \\ &= (৩ক \times ক) \text{ বর্গমিটার} = ৩ক^2 \text{ বর্গমিটার}\end{aligned}$$

শর্তানুসারে,

$$৩ক^2 = ১৪৭$$

$$\text{বা, } ক^2 = \frac{১৪৭}{৩}$$

$$\text{বা, } ক^2 = ৪৯$$

$$\therefore ক = \sqrt{৪৯} = ৭$$

অতএব, প্রস্থ = ৭ মিটার,

এবং দৈর্ঘ্য = (৩ × ৭) মিটার বা ২১ মিটার।

উদাহরণ ১০। বায়ু পানির তুলনায় ০.০০১২৯ গুণ ভারী যে ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে ১৬ মিটার, ১২ মিটার ও ৪ মিটার, তাতে কত কিলোগ্রাম বায়ু আছে?

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : ঘরের আয়তন} &= \text{দৈর্ঘ্য} \times \text{প্রস্থ} \times \text{উচ্চতা} \\ &= ১৬ \text{ মি.} \times ১২ \text{ মি.} \times ৪ \text{ মি} \\ &= ৭৬৮ \text{ ঘনমিটার} \\ &= ৭৬৮ \times ১০০০০০০ \text{ ঘন সে.মি.} \\ &= ৭৬৮০০০০০০ \text{ ঘন সে মি}\end{aligned}$$

বায়ু পানির তুলনায় ০.০০১২৯ গুণ ভারী।

$$\therefore ১ \text{ ঘন সে. মি. বায়ুর ওজন} = ০.০০১২৯ \text{ গ্রাম}$$

$$\begin{aligned}\text{অতএব, ঘরটিতে বায়ুর পরিমাণ} &= ৭৬৮০০০০০০ \times ০.০০১২৯ \text{ গ্রাম} \\ &= ৯৯০৭২০ \text{ গ্রাম} \\ &= ৯৯০.৭২ \text{ কিলোগ্রাম}\end{aligned}$$

\therefore ঘরটিতে ৯৯০.৭২ কিলোগ্রাম বায়ু আছে।

উদাহরণ ১১ ২১ মিটার দীর্ঘ এবং ১৫ মিটার প্রস্থ একটি বাগানের বাইরে চারদিকে ২ মিটার প্রশস্ত একটি রাস্তা আছে। প্রতি বর্গমিটারে ২.৭৫ টাকা দরে রাস্তাটিতে ঘাস লাগাতে মোট কত খরচ হবে?

সমাধান :

রাস্তাসহ বাগানের দৈর্ঘ্য = ২১ মি. + (২ + ২) মি. = ২৫ মিটার

প্রস্থ = ১৫ মি. + (২ + ২) মি. = ১৯ মিটার

রাস্তাসহ বাগানের ক্ষেত্রফল = (২৫ × ১৯) বর্গমিটার
= ৪৭৫ বর্গমিটার

রাস্তাবাদে বাগানের ক্ষেত্রফল = (২১ × ১৫) বর্গমিটার
= ৩১৫ বর্গমিটার

∴ রাস্তার ক্ষেত্রফল = (৪৭৫ - ৩১৫) বর্গমিটার
= ১৬০ বর্গমিটার

ঘাস লাগানোর মোট খরচ = (১৬০ × ২.৭৫) টাকা
= ৪৪০.০০ টাকা

অতএব, ঘাস লাগানোর মোট খরচ ৪৪০ টাকা।

উদাহরণ ১২। ৪০ মিটার দৈর্ঘ্য এবং ৩০ মিটার প্রস্থবিশিষ্ট একটি মাঠের চিক মাঝে আড়াআড়িভাবে ১.৫ মিটার প্রশস্ত দুইটি রাস্তা আছে। রাস্তা দুইটির মোট ক্ষেত্রফল কত?

সমাধান : দৈর্ঘ্য বরাবর রাস্তাটির ক্ষেত্রফল = ৪০ × ১.৫ বর্গমিটার

= ৬০ বর্গমিটার

প্রস্থ বরাবর রাস্তাটির ক্ষেত্রফল = (৩০ - ১.৫) × ১.৫ বর্গমিটার

= ২৮.৫ × ১.৫ বর্গমিটার

= ৪২.৭৫ বর্গমিটার

অতএব, রাস্তাদ্বয়ের ক্ষেত্রফল = (৬০ + ৪২.৭৫) বর্গমিটার

= ১০২.৭৫ বর্গমিটার

∴ রাস্তাদ্বয়ের মোট ক্ষেত্রফল ১০২.৭৫ বর্গমিটার।

উদাহরণ ১৩। ২০ মিটার দীর্ঘ একটি কামরার ঘেঁষে কম্পেট দিয়ে ঢাকতে ৭৫০০ টাকা খরচ হয় যদি ঐ কামরাটির প্রস্থ ৪ মিটার কম হতো, তবে ৬০০০ টাকা খরচ হতো। কামরাটির প্রস্থ কত?

সমাধান : কামরার দৈর্ঘ্য ২০ মিটার। প্রস্থ ৪ মিটার কমলে ক্ষেত্রফল কমে (২০ মিটার × ৪ মিটার)
= ৮০ বর্গমিটার

ক্ষেত্রফল ৮০ বর্গমিটার কামার খরচ কমে (৭৫০০ - ৬০০০) টাকা
= ১৫০০ টাকা

১৫০০ টাকা খরচ হয় ৮০ বর্গমিটারে

$$\therefore ১ \text{ " " " " } = \frac{৮০}{১৫০০} \text{ " "}$$

$$\therefore ৭৫০০ \text{ " " " " } = \frac{৮০ \times ৭৫০০}{১৫০০} \text{ " " বা } ৪০০ \text{ বর্গমিটারে}$$

অতএব, কামারের ক্ষেত্রফল ৪০০ বর্গমিটার।

$$\begin{aligned} \therefore \text{কামরাটির প্রস্থ} &= \frac{\text{ক্ষেত্রফল}}{\text{দৈর্ঘ্য}} \\ &= \frac{৪০০}{২০} \text{ মিটার} \\ &= ২০ \text{ মিটার} \end{aligned}$$

\therefore কামরাটির প্রস্থ ২০ মিটার।

উদাহরণ ১৪। একটি ঘরের মেঝের দৈর্ঘ্য ৪ মিটার এবং প্রস্থ ৩.৫ মিটার। ঘরটির উচ্চতা ৩ মিটার এবং এর দেওয়ালগুলো ১৫ সে.মি. পুরু হলে, চার দেওয়ালের আয়তন কত?

$$\text{সমাধান দেওয়ালের পুরুত্ব } ১৫ \text{ সে.মি.} = \frac{১৫}{১০০} = ০.১৫ \text{ মিটার}$$

চিত্রানুসারে, দৈর্ঘ্যের দিকে ২টি দেওয়ালের ঘনফল -

$$\begin{array}{r} ৪ \text{ মিটার} \\ \times ০.১৫ \\ \hline ০.৬০ \\ ১৫ \text{ সে.মি.} \\ \times ৩ \\ \hline ০.৪৫ \\ \hline ১.০৫ \end{array}$$

$$(৪ + ২ \times ০.১৫) \times ৩ \times ০.১৫ \times ২ \text{ ঘনমিটার} = ৪.৩ \times ৩ \times ০.১৫ \times ২ \text{ ঘনমিটার}$$

$$= ৩.৮৭ \text{ ঘনমিটার}$$

$$\text{এবং প্রস্থের দিকে ২টি দেওয়ালের আয়তন} = ৩.৫ \times ৩ \times ০.১৫ \times ২ \text{ ঘনমিটার}$$

$$= ৩.১৫ \text{ ঘনমিটার}$$

$$\therefore \text{দেওয়ালগুলোর মোট আয়তন} = (৩.৮৭ + ৩.১৫) \text{ ঘনমিটার}$$

$$= ৭.০২ \text{ ঘনমিটার}$$

\therefore নির্ণেয় আয়তন ৭.০২ ঘনমিটার।

উদাহরণ ১৫ একটি ঘরের ৩টি দরজা এবং ৬টি জানালা আছে। প্রত্যেকটি দরজা ২ মিটার লম্বা এবং ১.২৫ মিটার চওড়া, প্রত্যেক জানালা ১.২৫ মিটার লম্বা এবং ১ মিটার চওড়া। এই ঘরের দরজা জানালা তৈরি করতে ৫ মিটার লম্বা ও ০.৬০ মিটার চওড়া কয়টি তক্তার প্রয়োজন?

সমাধান : ৩টি দরজার ক্ষেত্রফল $= (২ \times ১.২৫) \times ৩$ বর্গমিটার
 $= ৭.৫$ বর্গমিটার

৬টি জানালার ক্ষেত্রফল $= (১.২৫ \times ১) \times ৬$ বর্গমিটার
 $= ৭.৫$ বর্গমিটার

দরজা ও জানালার মোট ক্ষেত্রফল $= (৭.৫ + ৭.৫)$ বর্গমিটার $= ১৫$ বর্গমিটার

একটি তক্তার ক্ষেত্রফল $= (৫ \times ০.৬)$ বর্গমিটার $= ৩$ বর্গমিটার

নির্ণেয় তক্তার সংখ্যা $=$ দরজা ও জানালার মোট ক্ষেত্রফল \div তক্তার ক্ষেত্রফল
 $= (১৫ \div ৩)$ টি
 $= ৫$ টি

উদাহরণ ১৬ একটি আয়তাকার লোহার টুকরার দৈর্ঘ্য ৮.৮ সে.মি, প্রস্থ ৬ সে.মি ও উচ্চতা ২.৫ সে.মি। লোহার টুকরাটিকে ১৫ সে.মি, দৈর্ঘ্য, ৬.৫ সে.মি প্রস্থ ও ৪ সে.মি উচ্চতার আয়তাকার পাত্রে রেখে পানি দ্বারা পূর্ণ করা হলো। লোহা পানির তুলনায় ৭.৫ গুণ ভারী।

ক, পানির পাত্রের আয়তন নির্ণয় কর।

খ, লোহার টুকরার গুজন নির্ণয় কর।

গ পাত্রটি পানিপূর্ণ অবস্থায় লোহার টুকরাটি তুলে আনা হলে, পাত্রের পানির উচ্চতা কত হবে?

সমাধান : (ক) পানির পাত্রটির দৈর্ঘ্য ১৫ সে.মি,

প্রস্থ ৬.৫ সে.মি,

এবং উচ্চতা ৪ সে.মি,

\therefore পানির পাত্রটির আয়তন $= (১৫ \times ৬.৫ \times ৪)$ ঘন সে.মি,
 $= ৩৯০$ ঘন সে.মি

(খ) লোহার টুকরাটির দৈর্ঘ্য ৮.৮ সে.মি,

প্রস্থ ৬ সে.মি,

এবং উচ্চতা ২.৫ সে.মি,

লোহার টুকরাটির আয়তন $= (৮.৮ \times ৬ \times ২.৫)$
 $= ১৩২$ ঘন সে.মি,

আমরা জানি,

১ ঘন সে.মি, পানির গুজন ১ গ্রাম

এবং দেয়া আছে লোহা পানির তুলনায় ৭.৫ গুণ ভারী

∴ ১ ঘন সে.মি. লোহার ওজন (১×৭.৫) গ্রাম

∴ ১৩২ ঘন সে.মি. লোহার ওজন (৭.৫ × ১৩২) গ্রাম
= ৯৯০ গ্রাম

∴ লোহার টুকরাটির ওজন ৯৯০ গ্রাম

(খ) পানির পাত্রের আয়তন ৩৯০ ঘন সে.মি.

লোহার টুকরাটির আয়তন ১৩২ ঘন সে.মি.

∴ লোহার টুকরাসহ পানিপূর্ণ পাত্র থেকে লোহার টুকরাটিকে তুলে

আনা হলে পাত্রের অবশিষ্ট পানির আয়তন = (৩৯০ - ১৩২) ঘন সে.মি.
= ২৫৮ ঘন সে.মি.

পাত্রের অবশিষ্ট পানির উচ্চতা x সে.মি. হলে

$$x \times ১৫ \times ৬.৫ = ২৫৮$$

$$\text{বা } x = \frac{২৫৮}{১৫ \times ৬.৫}$$

$$= \frac{২৫৮}{৯৭.৫}$$

$$= ২.৬৫ \text{ (প্রায়)}$$

∴ পাত্রের অবশিষ্ট পানির উচ্চতা ২.৬৫ সে.মি. (প্রায়)

অনুশীলনী ৩

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। গ্রিক ভাষায় ডেকা অর্থ—

ক) ১০ গুণ

খ) ১০০ গুণ

গ) সমসাম্য

ঘ) শতাংশ

২। ১ স্টেয়ারে—

i. ১৩.০৮ ঘনগজ

ii. ১ ঘনমিটার

iii. ৩৫.৩ ঘনফুট

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii

খ) i ও iii

গ) ii ও iii

ঘ) i, ii ও iii

৩। ৪ সে.মি. বাহু বিশিষ্ট ঘনকের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ক) ১৬

খ) ২৪

গ) ৬৪

ঘ) ৯৬

৪। একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ১০ হেক্টর। এর এয়রে প্রকাশিত মান—

ক) ২.৪৭

খ) ৪.০৪৯

গ) ১০০

ঘ) ১০০০

৫. পানিপূর্ণ একটি চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য ৩ মিটার, প্রস্থ ২ মিটার ও উচ্চতা ১ মিটার

- i. চৌবাচ্চার আয়তন ৬ ঘনমিটার
- ii. চৌবাচ্চার পানির ওজন ৬ কিলোগ্রাম
- iii. পানি ভর্তি চৌবাচ্চার পানির আয়তন ৬০০০ লিটার

নিচের কোনটি সঠিক?

- ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

নিচের অনুচ্ছেদের আলোকে ৬ ও ৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি আয়তাকার বাগানের ক্ষেত্রফল ৪০০ বর্গমিটার এবং প্রস্থ ১৬ মিটার

৬। বাগানের পরিসীমা কত মিটার?

- ক) ১৬ খ) ২৫ গ) ৪১ ঘ) ৮২

৭. বাগানের কর্ণ কত মিটার?

- ক) ২৯.৬৮ খ) ২৯.৮৬ গ) ৩২.৬৮ ঘ) ৪১

৮. একটি গাড়ির চাকার পরিধি ৫ মিটার। ১ কি.মি. ৫০০ মিটার পথ যেতে চাকাটি কতবার ঘুরবে?

- ক) ২০০ খ) ২৫০ গ) ৩০০ ঘ) ৩৫০

৯। এককের আন্তর্জাতিক পদ্ধতি-

- i. এর বৈশিষ্ট্য দশ গুণোত্তর
- ii. অষ্টাদশ শতাব্দীতে ফ্রান্সে প্রথম চালু হয়
- iii. বাংলাদেশে ১ জুলাই ১৯৮২ সালে চালু হয়

নিচের কোনটি সঠিক?

- ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

১০. একটি পুকুরের দৈর্ঘ্য ৬০ মিটার এবং প্রস্থ ৪০ মিটার। পুকুরের পাড়ের বিস্তার ৩ মিটার হলে, পাড়ের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১১. আয়তাকার একটি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ১০ একর এবং তার দৈর্ঘ্য প্রস্থের ৪ গুন। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য কত মিটার?

১২. একটি আয়তাকার ঘরের দৈর্ঘ্য প্রস্থের দেড় গুন। এর ক্ষেত্রফল ২১৬ বর্গমিটার হলে, পরিসীমা কত?

১৩. একটি ত্রিভুজাকৃতি ক্ষেত্রের ভূমি ২৪ মিটার এবং উচ্চতা ১৫ মিটার ৫০ সেন্টিমিটার হলে, এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১৪. একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ৪৮ মিটার এবং প্রস্থ ৩২ মিটার ৮০ সে.মি. ক্ষেত্রটির বাইরে চারদিকে ৩ মিটার বিস্তৃত একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির ক্ষেত্রফল কত?

১৫. একটি বর্গাকার ক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য ৩০০ মিটার এবং বাইরে চারদিকে ৪ মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির ক্ষেত্রফল কত?

১৬। একটি ত্রিভুজাকৃতি জমির ক্ষেত্রফল ২৬৪ বর্গমিটার। এর ভূমি ২২ মিটার হলে, উচ্চতা নির্ণয় কর

- ১৭ একটি চৌবাচ্চায় ১৯২০০ লিটার পানি ধরে। এর গভীরতা ২.৫৬ মিটার এবং প্রস্থ ২.৫ মিটার হলে, দৈর্ঘ্য কত?
- ১৮ স্বর্ণ, পানির তুলনায় ১৯ গুণ ভারী। আয়তাকার একটি স্বর্ণের বারের দৈর্ঘ্য ৭.৮ সেন্টিমিটার, প্রস্থ ৬.৪ সেন্টিমিটার এবং উচ্চতা ২.৫ সেন্টিমিটার। স্বর্ণের বারটির ওজন কত?
- ১৯ একটি ছোট ব্যাক্সের দৈর্ঘ্য ১৫ সে. মি. ২৪ মি. মি., প্রস্থ ৭ সে. মি., ৬.২ মি. মি. এবং উচ্চতা ৫ সে. মি. ৮ মি. মি.। ব্যাক্সটির আয়তন কত ঘন সেন্টিমিটার?
- ২০ একটি আয়তাকার চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য ৫.৫ মিটার, প্রস্থ ৪ মিটার এবং উচ্চতা ২ মিটার। উক্ত চৌবাচ্চাটি পানিভর্তি থাকলে পানির আয়তন কত লিটার এবং ওজন কত কিলোগ্রাম হবে?
- ২১ আয়তাকার একটি মাঠের দৈর্ঘ্য প্রস্থের ১৫ গুণ। প্রতি বর্গমিটার ১৯০ টাকা দরে ঘাস লাগাতে ১০২৬০০০ টাকা ব্যয় হয়। প্রতি মিটার ২৫০ টাকা দরে এই মাঠের চারদিকে বেড়া দিতে মোট কত ব্যয় হবে?
- ২২ একটি ঘরের মেঝে কার্পেট দিয়ে ঢাকতে মোট ৭২০০ টাকা খরচ হয়। ঘরটির প্রস্থ ৩ মিটার কম হলে ৫৭৬ টাকা কম খরচ হতো। ঘরটির প্রস্থ কত?
- ২৩ ৮০ মিটার দৈর্ঘ্য ও ৬০ মিটার প্রস্থবিশিষ্ট একটি আয়তাকার বাগানের ভিতর চারদিকে ৪ মিটার প্রশস্ত কটি পথ আছে। প্রতি বর্গমিটার ৭.২৫ টাকা দরে এই পথ বানানোর খরচ কত?
- ২৪ ২.৫ মিটার গভীর একটি বর্গাকৃতি খোলা চৌবাচ্চায় ২৮,৯০০ লিটার পানি ধরে। এর ভিতরের দিকে সিসার পাত লাগাতে প্রতি বর্গমিটার ১২.৫০ টাকা হিসাবে মোট কত খরচ হবে?
- ২৫ একটি সরের মেঝে ২৬ মি. লম্বা ও ২০ মি. চওড়া ৪ মি. লম্বা ও ২.৫ মি. চওড়া কয়টি মাদুর দিয়ে মেঝেটি সম্পূর্ণ ঢাকা যাবে? প্রতিটি মাদুরের দাম ২০০ টাকা হলে, মোট খরচ কত হবে?
- ২৬ একটি বইয়ের দৈর্ঘ্য ২৫ সে. মি. ও প্রস্থ ১৮ সে. মি. বইটির পৃষ্ঠাসংখ্যা ২০০ এবং প্রতি পাতা কাগজের পুরুত্ব ০.১ মি. মি. হলে, বইটির আয়তন নির্ণয় কর।
- ২৭ একটি পুকুরের দৈর্ঘ্য ৩২ মিটার, প্রস্থ ২০ মিটার এবং পুকুরের পানির গভীরতা ৩ মিটার। একটি পানির মোটর দ্বারা পুকুরটি পানিশূন্য করা হচ্ছে যা প্রতি সেকেন্ডে ০.১ ঘনমিটার পানি সেচেতে পারে। পুকুরটি পানিশূন্য করতে কত সময় লাগবে?
- ২৮ ৩ মিটার দৈর্ঘ্য, ২ মিটার প্রস্থ ও ১ মিটার উচ্চতাবিশিষ্ট একটি খালি চৌবাচ্চায় ৫০ সে. মি. বাতাবিশিষ্ট একটি নিরেট ধাতব ঘনক রাখা আছে। চৌবাচ্চাটি পানি দ্বারা পূর্ণ করার পর ঘনকটি ভুলে আনা হলে, পানির গভীরতা কত হবে?
- ২৯ একটি ঘরের প্রস্থ দৈর্ঘ্যের $\frac{2}{3}$ অংশ। ঘরের দৈর্ঘ্য ও উচ্চতা যথাক্রমে ১৫ মিটার ও ৪ মিটার। মেঝের চারিদিকে ১ মিটার ফাঁকা রেখে ৫০ সে. মি. বর্গাকার পাথর বসানো হলো। বায়ু পানির তুলনায় ০.০০১২৯ গুণ ভারী।
ক, ঘরের পরিসীমা নির্ণয় কর।
খ, মেঝের উল্লিখিত স্থান বাঁধাই করতে কতটি পাথরের প্রয়োজন হবে?
গ, ঘরটিতে কত কিলোগ্রাম বায়ু আছে?

- ৩০ একটি আয়তাকার জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে ৮০ মিটার ও ৬০ মিটার জমির ভিতর ৪ মিটার চওড়া পাড় ও ৩ মিটার গভীরতা বিশিষ্ট একটি পুকুর খনন করা হলো একটি পানির মোটর দ্বারা প্রতি সেকেন্ডে ০.১ ঘনমিটার পানি শূন্য করা যায়।
- ক. পুকুরের গভীরতা ইঞ্চিতে প্রকাশ কর।
- খ. পুকুর পাড়ের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
- গ. পানিপূর্ণ পুকুরটি পানি শূন্য করতে কত সময় প্রয়োজন?
- ৩১ আয়তাকার একটি মাদ্রাসা ক্যাম্পাসের ক্ষেত্রফল ১০ একর এবং এর দৈর্ঘ্য প্রস্থের ৪ গুণ ক্যাম্পাসে অবস্থিত অভিটোরিয়ামের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে ৪০ মিটার, ৩৫ মিটার ও ১০ মিটার এবং দেওয়ালের পুরুত্ব ১৫ সে.মি.।
- ক. ক্যাম্পাস এলাকা কত হেক্টর?
- খ. মাদ্রাসা ক্যাম্পাসের সীমানা প্রাচীরের দৈর্ঘ্য মিটারে নির্ণয় কর।
- গ. অভিটোরিয়ামের চার দেওয়ালের আয়তন নির্ণয় কর।

চতুর্থ অধ্যায়

বীজগণিতীয় সূত্রাবলি ও প্রয়োগ

এই অধ্যায়ের পুরোজন্মীয় পূর্বজ্ঞান বইটির শেষে পরিচিতি আশে সন্নিবেশ আছে। প্রথমে পরিচিতি অংশ পাঠ আলোচনা করতে হবে। দৈনন্দিন জীবনের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যা সমাধানের বীজগণিতের প্রয়োগ ও ব্যবহার ব্যাপকভাবে হয়ে থাকে। বীজগণিতীয় প্রতীক দ্বারা প্রকাশিত যেকোনো সাধারণ নিয়ম বা সিদ্ধান্তকে বীজগণিতীয় সূত্র বা সংক্ষেপে সূত্র বলা হয়। নানাবিধ গাণিতিক সমস্যা বীজগণিতীয় সূত্রের সাহায্যে সমাধান করা যায়। সপ্তম শ্রেণিতে প্রথম চারটি সূত্র ও এদের সাথে সম্পৃক্ত অনুসিদ্ধান্তগুলো সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। এ অধ্যায়ে সেগুলো পুনরুল্লেখ করা হলো এবং এদের প্রয়োগ দেখানোর জন্য কিছু উদাহরণ দেওয়া হলো। যেন শিক্ষার্থীরা প্রয়োগ সম্পর্কে যথেষ্ট জ্ঞান অর্জন করতে পারে। এ অধ্যায়ে বীজগণিতীয় সূত্র প্রয়োগ করে দ্বিপদী ও ত্রিপদী রাশির বর্গ ও ঘন নির্ণয়, মধ্যপদ বিশ্লেষণ, উৎপাদক এবং এদের সাহায্যে কীভাবে বীজগণিতীয় রাশির গ.সা.গু. ও ল.সা.গু. নির্ণয় করা যায় তা বিস্তারিতভাবে আলোচনা করা হয়েছে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা—

- বীজগণিতীয় সূত্র প্রয়োগ করে দ্বিপদী ও ত্রিপদী রাশির বর্গ নিরূপণ, সরলীকরণ ও ঘন নির্ণয় করতে পারবে।
- বীজগণিতীয় সূত্র প্রয়োগ করে দ্বিপদী ও ত্রিপদী রাশির ঘন নির্ণয়, সরলীকরণ ও ঘন নির্ণয় করতে পারবে।
- মধ্যপদ বিশ্লেষণের সাহায্যে রাশিমালার উৎপাদক বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- বীজগণিতীয় রাশির গ.সা.গু. ও ল.সা.গু. নির্ণয় করতে পারবে।

8.1 বীজগণিতীয় সূত্রাবলি

সপ্তম শ্রেণিতে বীজগণিতীয় প্রথম চারটি সূত্র ও এদের সাথে সম্পৃক্ত অনুসিদ্ধান্তগুলো সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে। এখানে সেগুলো পুনরুল্লেখ করা হলো।

$(a + b)^2$ এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যাটি নিম্নরূপ :

সম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= (a + b) \times (a + b) = (a + b)^2$

$$\therefore (a + b)^2 = a \times (a + b) + b \times (a + b)$$

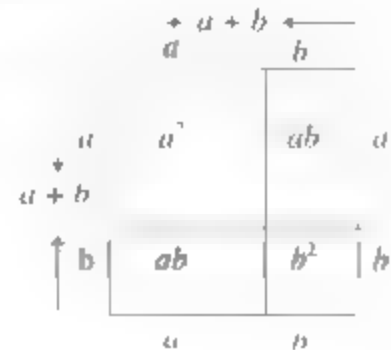
$$= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

আবার, বর্গক্ষেত্রটির অংশগুলোর ক্ষেত্রফলের সমষ্টি

$$a \times a + a \times b + b \times a + b \times b$$

$$= a^2 + ab + ab + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$



লক্ষ করি, সম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল – বর্গক্ষেত্রটির অংশগুলোর ক্ষেত্রফলের সমষ্টি

$$\therefore (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

সুপ্তম শ্রেণিতে যে সূত্র ও অনুসিদ্ধান্তগুলো সম্পর্কে জেনেছি তা হলো ।

সূত্র ১ । $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

কথায়, দুইটি রাশির যোগফলের বর্গ – ১ম রাশির বর্গ + ২ × ১ম রাশি × ২য় রাশি + ২য় রাশির বর্গ

সূত্র ২ । $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

কথায়, দুইটি রাশির বিয়োগফলের বর্গ – ১ম রাশির বর্গ – ২ × ১ম রাশি × ২য় রাশি + ২য় রাশির বর্গ

সূত্র ৩ । $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

কথায়, দুইটি রাশির বর্গের বিয়োগফল = রাশি দুইটির যোগফল × রাশি দুইটির বিয়োগফল

সূত্র ৪ । $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

কথায়, দুইটি দ্বিপদী রাশির প্রথম পদ একই হলে, তাদের গুণফল হবে প্রথম পদের বর্গ, স্ব-স্ব চিহ্নযুক্ত দ্বিতীয় পদদ্বয়ের সমষ্টির সাথে প্রথম পদের গুণফল ও স্ব-স্ব চিহ্নযুক্ত দ্বিতীয় পদদ্বয়ের গুণফলের সমষ্টির সমান ।

অর্থাৎ, $(1 + a)(1 + b) = 1^2 + (a + b) + ab$ (১ এর বর্গ + (১ এবং ১ এর বর্গগুণফল) + (১ এবং ১ এর গুণফল)

অনুসিদ্ধান্ত ১ । $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

অনুসিদ্ধান্ত ২ । $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$

অনুসিদ্ধান্ত ৩ । $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$

অনুসিদ্ধান্ত ৪ । $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

অনুসিদ্ধান্ত ৫ । $2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$

অনুসিদ্ধান্ত ৬ । $4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$

$$\text{বা, } ab = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - \left(\frac{a-b}{2} \right)^2$$

উদাহরণ ১ । $3x + 5y$ এর বর্গ নির্ণয় কর ।

সমাধান : $(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 5y + (5y)^2$
 $= 9x^2 + 30xy + 25y^2$

উদাহরণ ২। বর্গের সূত্র প্রয়োগ করে ২৫ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } (25)^2 &= (20 + 5)^2 = (20)^2 + 2 \times 20 \times 5 + (5)^2 \\ &= 400 + 200 + 25 \\ &= 625\end{aligned}$$

উদাহরণ ৩। $4x - 7y$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } (4x - 7y)^2 &= (4x)^2 - 2 \times 4x \times 7y + (7y)^2 \\ &= 16x^2 - 56xy + 49y^2\end{aligned}$$

উদাহরণ ৪। $a + b = 8$ এবং $ab = 15$ হলে, $a^2 + b^2$ এর মান নির্ণয় কর

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } a^2 + b^2 &= (a + b)^2 - 2ab \\ &= (8)^2 - 2 \times 15 \\ &= 64 - 30 \\ &= 34\end{aligned}$$

উদাহরণ ৫। $a - b = 7$ এবং $ab = 60$ হলে, $a^2 + b^2$ এর মান নির্ণয় কর

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } a^2 + b^2 &= (a - b)^2 + 2ab \\ &= (7)^2 + 2 \times 60 \\ &= 49 + 120 \\ &= 169\end{aligned}$$

উদাহরণ ৬। $x - y = 3$ এবং $xy = 10$ হলে, $(x + y)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } (x + y)^2 &= (x - y)^2 + 4xy \\ &= (3)^2 + 4 \times 10 \\ &= 9 + 40 \\ &= 49\end{aligned}$$

উদাহরণ ৭। $a + b = 7$ এবং $ab = 10$ হলে, $(a - b)^2$ এর মান নির্ণয় কর

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } (a - b)^2 &= (a + b)^2 - 4ab \\ &= (7)^2 - 4 \times 10 \\ &= 49 - 40 \\ &= 9\end{aligned}$$

ফর্ম ০৭, পশ্চিম-অষ্টম শ্রেণি (দাখিল)

উদাহরণ ৮ : $x - \frac{1}{x} = 5$ হলে, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ এর মান নির্ণয় কর

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4 \times x \times \frac{1}{x} \\ &= (5)^2 + 4 \\ &= 25 + 4 \\ &= 29\end{aligned}$$

কাজ :

- ১। $2a + 5b$ এর বর্গ নির্ণয় কর।
- ২। $4x - 7$ এর বর্গ নির্ণয় কর।
- ৩। $a + b = 7$ এবং $ab = 9$ হলে, $a^2 + b^2$ এর মান নির্ণয় কর।
- ৪। $x - y = 5$ এবং $xy = 6$ হলে, $(x + y)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

উদাহরণ ৯। সূত্রের সাহায্যে $3p + 4$ কে $3p - 4$ দ্বারা গুণ কর

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } (3p + 4)(3p - 4) &= (3p)^2 - (4)^2 \quad [\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2] \\ &= 9p^2 - 16\end{aligned}$$

উদাহরণ ১০। সূত্রের সাহায্যে $5m + 8$ কে $5m + 9$ দ্বারা গুণ কর

সমাধান : আমরা জানি, $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$$\begin{aligned}\therefore (5m + 8)(5m + 9) &= (5m)^2 + (8 + 9) \times 5m + 8 \times 9 \\ &= 25m^2 + 17 \times 5m + 72 \\ &= 25m^2 + 85m + 72\end{aligned}$$

উদাহরণ ১১। সরল কর $(5a - 7b)^2 + 2(5a - 7b)(9b - 4a) + (9b - 4a)^2$

সমাধান : ধরি, $(5a - 7b) = x$ এবং $9b - 4a = y$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{প্রদত্ত রাশি} &= x^2 + 2xy + y^2 \\
 &\quad - (1 + 1)^2 \\
 &= (5a - 7b + 9b - 4a)^2 \quad [x \text{ এবং } y \text{ এর মান বসিয়ে}] \\
 &= (a + 2b)^2 \\
 &= a^2 + 4ab + 4b^2
 \end{aligned}$$

উদাহরণ ১২। $(1 + 6)(1 + 4)$ কে দুইটি রাশির বর্গের অন্তরকপে প্রকাশ কর

সমাধান : আমরা জানি, $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$$\begin{aligned}
 \therefore (x+6)(x+4) &= \left(\frac{1+6+1+4}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+6-1-4}{2}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{2x+10}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 \\
 &= (x+5)^2 - 1^2
 \end{aligned}$$

উদাহরণ ১৩। $x = 4$, $y = -8$ এবং $z = 5$ হলে, $25(x+y)^2 - 20(x+y)(y+z) + 4(y+z)^2$ এর মান কত ?

সমাধান : ধরি, $x + y = a$ এবং $y + z = b$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{প্রদত্ত রাশি} &= 25a^2 - 20ab + 4b^2 \\
 &= (5a)^2 - 2 \times 5a \times 2b + (2b)^2 \\
 &= (5a - 2b)^2 \\
 &= [5(x+y) - 2(y+z)]^2 \quad [a \text{ ও } b \text{ এর মান বসিয়ে}] \\
 &= (5x + 5y - 2y - 2z)^2 \\
 &= (5x + 3y - 2z)^2 \\
 &= [5 \times 4 + 3 \times (-8) - 2 \times 5]^2 \quad [x, y \text{ ও } z \text{ এর মান বসিয়ে}] \\
 &= (20 - 24 - 10)^2 \\
 &= (-14)^2 = 196
 \end{aligned}$$

কাজ : ১. সূত্রের সাহায্যে $(5x + 7y)$ ও $(5x - 7y)$ এর গুণফল নির্ণয় কর

২. সূত্রের সাহায্যে $(x + 10)$ ও $(x - 14)$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

৩. $(4x - 3y)(6x + 5y)$ কে দুইটি রাশির বর্গের অন্তর রূপে প্রকাশ কর

$(a + b + c)^2$ এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা :

সম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল

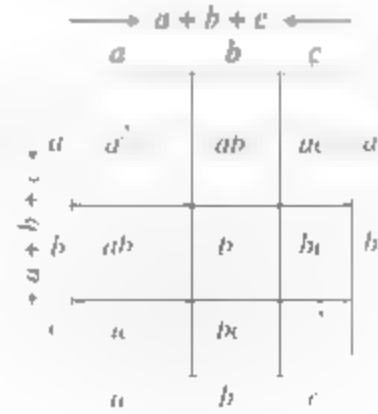
$$(a + b + c) \times (a + b + c) = (a + b + c)^2$$

$$(a + b + c)^2 = a \times (a + b + c) + b \times (a + b + c) + c \times (a + b + c)$$

$$= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ca + bc + c^2$$

$$= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$$

$$\therefore (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$



আবার, বর্গক্ষেত্রটির অংশগুলোর ক্ষেত্রফলের সমষ্টি

$$= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$$

$$= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

লক্ষ করি, সম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = বর্গক্ষেত্রটির অংশগুলোর ক্ষেত্রফলের সমষ্টি

$$\therefore (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

উদাহরণ ১৪। $2x + 3y + 5z$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $2x = a$, $3y = b$ এবং $5z = c$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশির বর্গ} = (a + b + c)^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$= (2x)^2 + (3y)^2 + (5z)^2 + 2 \times 2x \times 3y + 2 \times 3y \times 5z + 2 \times 2x \times 5z \quad [a, b \text{ ও } c \text{ এর}$$

$$= 4x^2 + 9y^2 + 25z^2 + 12xy + 30yz + 20xz$$

মান বসিয়ে।

$$\therefore (4x + 3y + 5z)^2 = 4x^2 + 9y^2 + 25z^2 + 12xy + 30yz + 20xz$$

উদাহরণ ১৫ : $5a - 6b - 7c$ এর বর্গ নির্ণয় কর ।

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } (5a - 6b - 7c)^2 &= \{5a - (6b + 7c)\}^2 \\ &= (5a)^2 - 2 \times 5a \times (6b + 7c) + (6b + 7c)^2 \\ &= 25a^2 - 10a(6b + 7c) + (6b)^2 + 2 \times 6b \times 7c + (7c)^2 \\ &= 25a^2 - 60ab - 70ac + 36b^2 + 84bc + 49c^2 \\ &= 25a^2 + 36b^2 + 49c^2 - 60ab + 84bc - 70ac\end{aligned}$$

বিকল্প সমাধান :

আমরা জানি, $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$

এখানে, $5a = x$, $-6b = y$ এবং $-7c = z$ ধরে

$$\begin{aligned}(5a - 6b - 7c)^2 &= (5a)^2 + (-6b)^2 + (-7c)^2 \\ &\quad + 2 \times (5a) \times (-6b) + 2 \times (-6b) \times (-7c) + 2 \times (5a) \times (-7c) \\ &= 25a^2 + 36b^2 + 49c^2 - 60ab + 84bc - 70ac\end{aligned}$$

কাজ : সূত্রের সাহায্যে বর্গ নির্ণয় কর :

$$১. \quad ax + by + c \qquad ২. \quad 4x + 5y - 7z$$

অনুশীলনী ৪.১

১। সূত্রের সাহায্যে নিচের রাশিগুলোর বর্গ নির্ণয় কর :

(ক) $5a + 7b$	(খ) $6x + 3$	(গ) $7p - 2q$
(ঘ) $ax - by$	(ঙ) $x^3 + xy$	(চ) $11a - 12b$
(ছ) $6x^2y - 5xy^2$	(জ) $x^2 - y^2$	(ঝ) $xyz - abc$
(ঞ) $a^2x^3 - b^2y^4$	(ট) 108	(ঠ) 606
(ড) 597	(ঢ) $a - b + c$	(ণ) $ax + b + 2$
(তি) $xy + yz - zx$	(দ) $3p + 2q - 5r$	(দ) $x^2 - y^2 - z^2$
(ধ) $7a^2 + 8b^2 - 5c^2$		

২। সরল কর :

(ক) $(x + y)^2 + 2(x + y)(x - y) + (x - y)^2$

(খ) $(2a + 3b)^2 - 2(2a + 3b)(3b - a) + (3b - a)^2$

(গ) $(3x^2 + 7y^2)^2 + 2(3x^2 + 7y^2)(3x^2 - 7y^2) + (3x^2 - 7y^2)^2$

(ঘ) $(8x + y)^2 - (16x + 2y)(5x + y) + (5x + y)^2$

(ঙ) $(5x^2 - 3x - 2)^2 + (2 + 5x^2 - 3x)^2 - 2(5x^2 - 3x - 2)(2 + 5x^2 - 3x)$

৩। সূত্র প্রয়োগ করে গুণফল নির্ণয় কর :

(ক) $(x + 7)(x - 7)$

(খ) $(5x + 13)(5x - 13)$

(গ) $(xy + yz)(xy - yz)$

(ঘ) $(ax + b)(ax - b)$

(ঙ) $(a + 3)(a + 4)$

(চ) $(ax + 3)(ax + 4)$

(ছ) $(6x + 17)(6x - 13)$

(জ) $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)(a^4 + b^4)$

(ঝ) $(ax - by + cz)(ax + by - cz)$

(ঞ) $(3a - 10)(3a - 5)$

(ট) $(5a + 2b - 3c)(5a + 2b + 3c)$

(ঠ) $(ax + by + 5)(ax + by + 3)$

৪। $a = 4$, $b = 6$ এবং $c = 3$ হলে $4a^2b^2 - 16ab^2c + 16b^2c^2$ এর মান নির্ণয় কর।

৫। $x - \frac{1}{x} = 3$ হলে, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

৬। $a + \frac{1}{a} = 4$ হলে, $a^4 + \frac{1}{a^4}$ এর মান কত?

৭। $m = 6$, $n = 7$ হলে $16(m^2 + n^2)^2 + 56(m^2 + n^2)(3m^2 - 2n^2) + 49(3m^2 - 2n^2)^2$

এর মান নির্ণয় কর।

৮। $a - \frac{1}{a} = m$ হলে, দেখাও যে, $a^4 + \frac{1}{a^4} = m^4 + 4m^2 + 2$

৯। $x - \frac{1}{x} = 4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$

১০। $m + \frac{1}{m} = 2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $m^4 + \frac{1}{m^4} = 2$

১১। $x + y = 12$ এবং $xy = 27$ হলে, $(x - y)^2$ ও $x^2 + y^2$ এর মান নির্ণয় কর

১২। $a + b = 13$ এবং $a - b = 3$ হলে, $2a^2 + 2b^2$ ও ab এর মান নির্ণয় কর

১৩। দুইটি রাশির বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর :

(ক) $(5p - 3q)(p + 7q)$

(খ) $(6a + 9b)(7b - 8a)$

(গ) $(3x + 5y)(7x - 5y)$

(ঘ) $(5x + 13)(5x - 13)$

১৪। দুইটি সংখ্যা a ও b , যেখানে $a > b$ । সংখ্যা দুয়ের যোগফল ১২ এবং গুণফল ১২।

ক) সূত্রের সাহায্যে গুণ কর: $(2x + 3)(2x - 7)$

খ) $2a^2 + 2b^2$ এর মান নির্ণয় কর।

গ) প্রমাণ কর যে, $(a + 2b)^2 - 5b^2 = 176$

৪.২ ঘনকলের সূত্রাবলি ও অনুসিদ্ধান্ত

সূত্র ৫। $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 $= a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

প্রমাণ : $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$
 $= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$
 $= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$
 $= a^3 + 2a^2b + ab^2 + (a^2b + 2ab^2 + b^3)$
 $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 $= a^3 + 3ab(a + b) + b^3$
 $= a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

অনুসিদ্ধান্ত ৭। $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

সূত্র ৬। $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
 $= a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

প্রমাণ : $(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2$
 $= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$
 $= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)$
 $= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$
 $= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
 $= a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

অনুসিদ্ধান্ত $b \mid a^3 \mid b^3 \mid (a \cdot b)^3 + 3ab(a \cdot b)$

উদাহরণ ১৬। $(3x + 2y)^3$ এর ঘন নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } (3x + 2y)^3 &= (3x)^3 + 3 \times (3x)^2 \times (2y) + 3 \times (3x) \times (2y)^2 + (2y)^3 \\ &= 27x^3 + 3 \times 9x^2 \times 2y + 3 \times 3x \times 4y^2 + 8y^3 \\ &= 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3\end{aligned}$$

উদাহরণ ১৭। $(2a + 5b)^3$ এর ঘন নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } (2a + 5b)^3 &= (2a)^3 + 3 \times (2a)^2 \times (5b) + 3 \times (2a) \times (5b)^2 + (5b)^3 \\ &= 8a^3 + 3 \times 4a^2 \times 5b + 3 \times 2a \times 25b^2 + 125b^3 \\ &= 8a^3 + 60a^2b + 150ab^2 + 125b^3\end{aligned}$$

উদাহরণ ১৮। $(m - 2n)^3$ এর ঘন নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } (m - 2n)^3 &= (m)^3 - 3 \times (m)^2 \times (2n) + 3 \times m \times (2n)^2 - (2n)^3 \\ &= m^3 - 3m^2 \times 2n + 3m \times 4n^2 - 8n^3 \\ &= m^3 - 6mn^2 + 12mn^2 - 8n^3\end{aligned}$$

উদাহরণ ১৯। $(4x - 5y)^3$ এর ঘন নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } (4x - 5y)^3 &= (4x)^3 - 3 \times (4x)^2 \times (5y) + 3 \times (4x) \times (5y)^2 - (5y)^3 \\ &= 64x^3 - 3 \times 16x^2 \times 5y + 3 \times 4x \times 25y^2 - 125y^3 \\ &= 64x^3 - 240x^2y + 300xy^2 - 125y^3\end{aligned}$$

উদাহরণ ২০। $(x + y - z)^3$ এর ঘন নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } (x + y - z)^3 &= \{(x + y) - z\}^3 \\ &= (x + y)^3 - 3(x + y)^2 \times z + 3(x + y) \times z^2 - z^3 \\ &= (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - 3(x^2 + 2xy + y^2) \times z + 3(x + y) \times z^2 - z^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3x^2z - 6xyz - 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 - z^3 \\ &= x^3 + y^3 - z^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 3x^2z - 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 - 6xyz\end{aligned}$$

কাজ : সূত্রের সাহায্যে ঘন নির্ণয় কর :

১। $ab + bc$ ২। $2x - 5y$ ৩। $2x - 3y - z$

উদাহরণ ২১। সরল কর :

$$(4m + 2n)^3 + 3(4m + 2n)^2(m - 2n) + 3(4m + 2n)(m - 2n)^2 + (m - 2n)^3$$

সমাধান : ধরি, $4m + 2n = a$ এবং $m - 2n = b$

$$\begin{aligned} \cdot \text{ প্রদত্ত রাশি} &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ &= (a + b)^3 \\ &= [(4m + 2n) + (m - 2n)]^3 \\ &= (4m + 2n + m - 2n)^3 \\ &= (5m)^3 = 125m^3 \end{aligned}$$

উদাহরণ ২২। সরল কর :

$$(4a - 8b) - (3a - 9b)^2 - 3(a + b)(4a - 8b)(3a - 9b)$$

সমাধান : ধরি, $4a - 8b = x$ এবং $3a - 9b = y$

$$\therefore x - y = (4a - 8b) - (3a - 9b) = 4a - 8b - 3a + 9b = a + b$$

$$\begin{aligned} \text{এখন প্রদত্ত রাশি} &= x^2 - y^2 - 3(x - y) \times x \times y \\ &= x^2 - y^2 - 3xy(x - y) \\ &= (x - y)^3 \\ &= (a + b)^3 \end{aligned}$$

উদাহরণ ২৩। $a + b = 3$ এবং $ab = 2$ হলে, $a^3 + b^3$ এর মান নির্ণয় কর

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } a^3 + b^3 &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) \\ &= (3)^3 - 3 \times 2 \times 3 \quad [\text{মান বসিয়ে}] \\ &= 27 - 18 \\ &= 9 \end{aligned}$$

বিকল্প সমাধান: দেওয়া আছে, $a + b = 3$ এবং $ab = 2$

$$\text{এখন, } a + b = 3$$

$$\text{বা, } (a + b)^3 = (3)^3 \quad [\text{উভয়পক্ষকে ঘন করে}]$$

$$\text{বা, } a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = 27$$

$$\text{বা, } a^3 + b^3 + 3 \times 2 \times 3 = 27$$

$$\text{বা, } a^3 + b^3 + 18 = 27$$

$$\text{বা, } a^3 + b^3 = 27 - 18$$

$$a^3 + b^3 = 9$$

উদাহরণ ২৪। $x = 1$ । 10 এবং $xy = 30$ হলে, $x^3 - y^3$ এর মান নির্ণয় কর

$$\text{সমাধান : } x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$$

$$= (10) + 3 \times 30 \times 10$$

$$= 1000 + 900$$

$$= 1900$$

উদাহরণ ২৫। $x + y = 4$ হলে, $x^3 + y^3 + 12xy$ এর মান কত ?

$$\text{সমাধান : } x^3 + y^3 + 12xy = x^3 + y^3 + 3 \times 4 \times xy$$

$$= x^3 + y^3 + 3(x + y) \times xy$$

$$= x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

$$= (x + y)^3$$

$$= (4)^3$$

$$= 64$$

উদাহরণ ২৬। $a + \frac{1}{a} = 7$ হলে, $a^3 + \frac{1}{a^3}$ এর মান নির্ণয় কর

$$\text{সমাধান : } a^3 + \frac{1}{a^3} = a^3 + \left(\frac{1}{a}\right)^3$$

$$\begin{aligned} & \left(a + \frac{1}{a} \right)^3 - 3 \times a \times \frac{1}{a} \left(a + \frac{1}{a} \right) \\ &= (7)^3 - 3 \times 7 \left[a + \frac{1}{a} = 7 \right] \\ &= 343 - 21 \\ &= 322 \end{aligned}$$

উদাহরণ ২৭। $m = 2$ হলে, $27m^3 + 54m^2 + 36m + 3$ এর মান নির্ণয় কর

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : প্রদত্ত রাশি} &= 27m^3 + 54m^2 + 36m + 3 \\ &= (3m)^3 + 3 \times (3m)^2 \times 2 + 3 \times (3m) \times (2) + (2)^3 - 5 \\ &= (3m + 2)^3 - 5 \\ &= (3 \times 2 + 2)^3 - 5 \quad [m \text{ এর মান বসিয়ে}] \\ &= (6 + 2)^3 - 5 = 8^3 - 5 \\ &= 512 - 5 = 507 \end{aligned}$$

কাজ : ১। সরল কর : $(7x-6)^3 - (5x-6)^3 - 6x(7x-6)(5x-6)$

২। $a+b=10$ এবং $ab=21$ হলে, a^3+b^3 এর মান নির্ণয় কর

৩। $a+\frac{1}{a}=3$ হলে, দেখাও যে, $a^3+\frac{1}{a^3}=18$

৪.৩ ঘনফলের সাথে সম্পৃক্ত আরও দুইটি সূত্র

সূত্র ৭। $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$$\begin{aligned} \text{প্রমাণ : } a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\ &= (a+b)[(a+b)^2 - 3ab] \\ &= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab) \\ &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \end{aligned}$$

বিলম্বীতভাবে, $(a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$$\begin{aligned} &= a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2) \\ &= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + b^3 \end{aligned}$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

সূত্র ৮। $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

প্রমাণ : $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

$$\begin{aligned} &= (a - b)(a - b)^2 + 3ab(a - b) \\ &= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab) \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

বিপরীতভাবে, $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\begin{aligned} &= a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2) \\ &= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - b^3 \end{aligned}$$

$\therefore (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

উদাহরণ ২৮। সূত্রের সাহায্যে $(x^3 + 2)$ ও $(x^3 - 2x^2 + 4)$ এর গুণফল নির্ণয় কর

সমাধান : $(x^3 + 2)(x^3 - 2x^2 + 4)$

$$\begin{aligned} &= (x^3 + 2)(x^3 - x \times 2 + 2^2) \\ &= (x^3)^3 + (2)^3 \\ &= x^9 + 8 \end{aligned}$$

উদাহরণ ২৯। সূত্রের সাহায্যে $(4a - 5b)$ ও $(16a^2 + 20ab + 25b^2)$ এর গুণফল নির্ণয় কর

সমাধান : $(4a - 5b)(16a^2 + 20ab + 25b^2)$

$$\begin{aligned} &= (4a - 5b)((4a)^2 + 4a \times 5b + (5b)^2) \\ &= (4a)^3 - (5b)^3 \\ &= 64a^3 - 125b^3 \end{aligned}$$

কাজ : সূত্রের সাহায্যে $(2a + 3b)$ ও $(4a^2 - 6ab + 9b^2)$ এর গুণফল নির্ণয় কর

অনুশীলনী ৪.২

১। সূত্রের সাহায্যে নিচের রাশিগুলোর ঘন নির্ণয় কর :

(ক) $3x + 1$ (খ) $x^2 + 1$ (গ) $5p + 2q$ (ঘ) $a^2b + c^2d$ (ঙ) $6p - 7$ (চ) $ax - m$

(ছ) $2p - 3r$ (জ) $x^2 + 2$ (ঝ) $2m + 3n - 5p$ (ঞ) $x^2 - y^2 + z^2$ (ট) $a^2b - c^2d$

(ঠ) $a^2b - b^2c$ (ড) $x^3 - 2y^3$ (ঢ) $11a - 12b$ (ণ) $x^3 + y^3$

২। সরল কর :

(ক) $(3x + y)^3 + 3(3x + y)^2(3x - y) + 3(3x + y)(3x - y)^2 + (3x - y)^3$

(খ) $(2p + 5q)^3 + 3(2p + 5q)^2(5q - 2p) + 3(2p + 5q)(5q - 2p)^2 + (5q - 2p)^3$

(গ) $(x + 2y)^3 - 3(x + 2y)^2(x - 2y) + 3(x + 2y)(x - 2y)^2 - (x - 2y)^3$

(ঘ) $(6m + 2)^3 - 3(6m + 2)^2(6m - 4) + 3(6m + 2)(6m - 4)^2 - (6m - 4)^3$

(ঙ) $(x - y)^3 + (x + y)^3 + 6x(x^2 - y^2)$

৩। $a + b = 8$ এবং $ab = 15$ হলে, $a^3 + b^3$ এর মান কত ?

৪। $x + y = 2$ হলে, দেখাও যে, $x^3 + y^3 + 6xy = 8$

৫। $2x + 3y = 13$ এবং $xy = 6$ হলে, $8x^3 + 27y^3$ এর মান নির্ণয় কর

৬। $p - q = 5$, $pq = 3$ হলে, $p^3 - q^3$ এর মান নির্ণয় কর।

৭। $x - 2y = 3$ হলে, $x^3 - 8y^3 - 18xy$ এর মান নির্ণয় কর।

৮। $4x - 3 = 5$ হলে, প্রমাণ কর যে, $64x^3 - 27 - 180x = 125$

৯। $a = 3$ এবং $b = 2$ হলে, $8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$ এর মান নির্ণয় কর

১০। $a = 7$ হলে, $a^3 + 6a^2 + 12a + 1$ এর মান নির্ণয় কর।

১১। $x = 5$ হলে, $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$ এর মান কত ?

১২। $a^2 + b^2 = c^2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a^6 + b^6 + 3a^2b^2c^2 = c^6$

১৩। $x + \frac{1}{x} = 4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^3 + \frac{1}{x^3} = 52$

১৪। $a + \frac{1}{a} = 5$ হলে, $a^3 - \frac{1}{a^3}$ এর মান কত ?

১৫। সূত্রের সাহায্যে গুণফল নির্ণয় কর :

(ক) $(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$ (খ) $(ax - by)(a^2x^2 + abxy + b^2y^2)$

(গ) $(2ab^3 - 1)(4a^2b^4 + 2ab^2 + 1)$ (ঘ) $(x^2 + a)(x^4 - ax^2 + a^2)$

(ঙ) $(7a + 4b)(49a^2 - 28ab + 16b^2)$ (চ) $(2a - 1)(4a^2 + 2a + 1)(8a^3 + 1)$

(ছ) $(x + a)(x^2 - ax + a^2)(x - a)(x^2 + ax + a^2)$

(জ) $(5a + 3b)(25a^2 - 15ab + 9b^2)(125a^3 - 27b^3)$

৪.৪ উৎপাদকে বিশ্লেষণ

উৎপাদক : যদি কোনো বীজগণিতীয় রাশি দুই বা ততোধিক রাশির গুণফল হয়, তাহলে শেষোক্ত রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথম রাশির উৎপাদক বা গুণনীয়ক (Factor) বলা হয় যেমন,

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, এখানে $(a + b)$ ও $(a - b)$ রাশি দুইটি $(a^2 - b^2)$ এর উৎপাদক

উৎপাদকে বিশ্লেষণ : যখন কোনো বীজগণিতীয় রাশিকে সম্ভাব্য দুই বা ততোধিক রাশির গুণফলরূপে প্রকাশ করা হয়, তখন একে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা বলে এবং ঐ রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত রাশির উৎপাদক বলা হয় যেমন, $x^2 + 2x = x(x + 2)$ । এখানে x ও $(x + 2)$ উৎপাদক।

উৎপাদক নির্ণয়ের নিয়মগুলো নিচে দেওয়া হলো :

(ক) সুবিধামতো সাজিয়ে :

$px - qy + qx - py$ কে সাজানো হলো, $px + qx - py - qy$ রূপে

এখন, $px + qx - py - qy = x(p + q) - y(p + q) = (p + q)(x - y)$.

আবার, $px - qy + qx - py$ কে সাজানো হলো, $px - py + qx - qy$ রূপে

এখন, $px - py + qx - qy = p(x - y) + q(x - y) = (x - y)(p + q)$

(খ) একটি রাশিকে পূর্ণ বর্গ আকারে প্রকাশ করে :

$$x^2 + 4xy + 4y^2 = (x)^2 + 2 \times x \times 2y + (2y)^2 \\ = (x + 2y)^2 = (x + 2y)(x + 2y)$$

(গ) একটি রাশিকে দুইটি রাশির বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করে এবং $a^2 - b^2$ সূত্র প্রয়োগ করে :

$a^2 + 2ab + b^2 - b^2 - 2b - 1$

$a^2 + 2ab + b^2 - b^2 - 2b - 1$ । এখানে b^2 একবার যোগ এবং একবার বিয়োগ করা হয়েছে। এতে রাশির মানের কোনো পরিবর্তন হয় না।

$(a^2 + 2ab + b^2) - (b^2 + 2b + 1)$

$(a + b)^2 - (b + 1)^2$

$= (a + b + b + 1)(a + b - b - 1)$

$(a + 2b + 1)(a - 1)$

বিকল্প নিয়ম :

$$\begin{aligned} & a^2 + 2ab + 2b + 1 \\ &= (a + 1) + (2ab + 2b) \\ &= (a + 1)(a + 1) + 2b(a + 1) \\ &= (a + 1)(a + 1 + 2b) \\ &= (a + 1)(a + 2b + 1) \end{aligned}$$

(ঘ) $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$ সূত্রটি ব্যবহার করে :

$$\begin{aligned} x^2 + 7x + 10 &= x^2 + (2 + 5)x + 2 \times 5 \\ &= (x + 2)(x + 5) \end{aligned}$$

(ঙ) একটি রাশিকে ঘন আকারে প্রকাশ করে :

$$\begin{aligned} 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 \\ &= (2x)^3 + 3 \times (2x)^2 \times 3 + 3 \times 2x \times (3)^2 + (3)^3 \\ &= (2x + 3)^3 \\ &= 2x + 3)(2x + 3)(2x + 3) \end{aligned}$$

(চ) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ এবং $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

সূত্র দুইটি ব্যবহার করে :

$$\begin{aligned} 8x^3 + 125 &= (2x)^3 + (5)^3 = (2x + 5)((2x)^2 - (2x) \cdot 5 + (5)^2) \\ &= (2x + 5)(4x^2 - 10x + 25) \\ 27x^3 - 8 &= (3x)^3 - (2)^3 = (3x - 2)((3x)^2 + (3x) \times 2 + (2)^2) \\ &= (3x - 2)(9x^2 + 6x + 4) \end{aligned}$$

উদাহরণ ১। $27x^3 + 8xy^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } 27x^3 + 8xy^3 &= x(27x^2 + 8y^3) \\ &= x\{(3x)^3 + (2y)^3\} \\ &= x\{3x + 2y\}\{(3x)^2 - (3x) \times (2y) + (2y)^2\} \\ &= x\{3x + 2y\}(9x^2 - 6xy + 4y^2) \end{aligned}$$

উদাহরণ ২। $24x^3 - 81y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } 24x^3 - 81y^3 &= 3(8x^3 - 27y^3) \\ &= 3\{(2x)^3 - (3y)^3\} \\ &= 3(2x - 3y)\{(2x)^2 + (2x) \cdot (3y) + (3y)^2\} \\ &= 3(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) \end{aligned}$$

কাজ : উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

$$১। 4x^2 - y^2 \quad ২। 6ab^2 - 24a \quad ৩। x^2 + 2px + p^2 - 4 \quad ৪। x^3 + 27y^3 \quad ৫। 27a^3 - 8$$

৪.৫ $x^2 + px + q$ আকারের রাশির উৎপাদক

আমরা জানি, $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$ । এই সূত্রটির বামপাশের রাশির সাথে $x^2 + px + q$ এর তুলনা করলে দেখা যায় যে, উভয় রাশিতেই তিনটি পদ আছে, প্রথম পদটি x^2 ও এর সহগ ১ (এক), দ্বিতীয় বা মধ্য পদটিতে x আছে যার সহগ যথাক্রমে $(a + b)$, ও p এবং তৃতীয় পদটি x বর্জিত, যেখানে যথাক্রমে ab ও q আছে।

$x^2 + (a + b)x + ab$ এর দুইটি উৎপাদক। অতএব, $x^2 + px + q$ এরও দুইটি উৎপাদক হবে

যদি করে, $x^2 + px + q$ এর উৎপাদক দুইটি $(x + a), (x + b)$

$$\text{সুতরাং, } x^2 + px + q = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

তাহলে, $p = a + b$ এবং $q = ab$

এখন, $x^2 + px + q$ এর উৎপাদক নির্ণয় করতে হলে, q কে এমন দুইটি উৎপাদকে প্রকাশ করতে হবে যার বীজগণিতীয় সমষ্টি p হয়, এই প্রক্রিয়াকে মধ্যপদ বিভাজন (Middle term breakup) বলে। $x^2 + 7x + 12$ রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হলে ১২ কে এমন দুইটি উৎপাদকে প্রকাশ করতে হবে যার সমষ্টি ৭ এবং গুণফল ১২ হয়। ১২ এর সম্ভাব্য উৎপাদক জোড়াসমূহ ১, ১২, ২, ৬ ও ৩, ৪ এদের মধ্যে ৩, ৪ জোড়াটির সমষ্টি $(3 + 4) = 7$ এবং গুণফল $3 \times 4 = 12$

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

মন্তব্য : প্রত্যেকের p ও q উভয়ই ধনাত্মক বিবেচনা করে, $x^2 + px + q = x^2 - px + q = x^2 + px - q$ এবং $x^2 - px - q$ আকারের রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হলে, প্রথম ও দ্বিতীয় রাশিতে q ধনাত্মক হওয়াতে q এর উৎপাদক দুইটি একই চিহ্নযুক্ত রাশি অর্থাৎ উভয়ই ধনাত্মক অথবা উভয়ই ঋণাত্মক হবে। এক্ষেত্রে, p ধনাত্মক হলে, q এর উভয় উৎপাদকই ধনাত্মক হবে, আর p ঋণাত্মক হলে, q এর উভয় উৎপাদকই ঋণাত্মক হবে।

তৃতীয় ও চতুর্থ আকারের রাশিতে q ঋণাত্মক অর্থাৎ, $(-q)$ হওয়াতে q এর উৎপাদক দুইটি বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে এবং p ধনাত্মক হলে, উৎপাদক দুইটির ধনাত্মক সংখ্যাটি ঋণাত্মক সংখ্যাটির পরম মান থেকে বড় হবে। আর p ঋণাত্মক হলে, উৎপাদক দুইটির ঋণাত্মক সংখ্যার পরম মান ধনাত্মক সংখ্যা থেকে বড় হবে।

উদাহরণ ৩। $x^2 + 5x + 6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : এমন দুইটি ধনাত্মক সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে, যাদের সমষ্টি ৫ এবং গুণফল ৬

৬ এর সম্ভাব্য উৎপাদক জোড়াগুলো হচ্ছে ১, ৬ ও ২, ৩।

এদের মধ্যে ২, ৩ জোড়াটির সংখ্যাগুলোর সমষ্টি $2 + 3 = 5$ এর গুণফল $2 \times 3 = 6$

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= x^2 + 2x + 3x + 6 \\ &= x(x + 2) + 3(x + 2) \\ &= (x + 2)(x + 3) \end{aligned}$$

উদাহরণ ৪। $x^2 - 15x + 54$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে যাদের সমষ্টি -15 এবং গুণফল 54 এখানে দুইটি সংখ্যার সমষ্টি ঋণাত্মক, কিন্তু গুণফল ধনাত্মক, কাজেই, সংখ্যা দুইটি উভয়ই ঋণাত্মক হবে 54 এর সম্ভাব্য উৎপাদক জোড়াগুলো হচ্ছে $-1, -54, 2, 27, 3, -18, -6, 9$ এদের মধ্যে $-6, -9$ এর সংখ্যাগুলোর সমষ্টি $-6-9 = -15$ এবং এদের গুণফল $(-6) \times (-9) = 54$

$$\begin{aligned} x^2 - 15x + 54 &= x^2 - 6x - 9x + 54 \\ &= x(x - 6) - 9(x - 6) \\ &= (x - 6)(x - 9) \end{aligned}$$

উদাহরণ ৫। $x^2 + 2x - 15$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে যাদের সমষ্টি 2 এবং গুণফল (-15) এখানে দুইটি সংখ্যার সমষ্টি ধনাত্মক, কিন্তু গুণফল ঋণাত্মক। কাজেই, সংখ্যা দুইটির মধ্যে যে সংখ্যার পরম মান বড় সেই সংখ্যাটি ধনাত্মক, আর যে সংখ্যার পরম মান ছোট সে সংখ্যাটি ঋণাত্মক হবে (-15) এর সম্ভাব্য উৎপাদক জোড়াগুলো হচ্ছে $(-1, 15)$ ও $(-3, 5)$

এদের মধ্যে $-3, 5$ এর সংখ্যাগুলোর সমষ্টি $= -3 + 5 = 2$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 15 &= x^2 + 5x - 3x - 15 \\ &= x(x + 5) - 3(x + 5) \\ &= (x + 5)(x - 3) \end{aligned}$$

উদাহরণ ৬। $x^2 - 3x - 28$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে যাদের সমষ্টি (-3) এবং গুণফল (-28) এখানে দুইটি সংখ্যার সমষ্টি ঋণাত্মক এবং গুণফল ঋণাত্মক কাজেই সংখ্যা দুইটির মধ্যে যে সংখ্যার পরম মান বড় সেই সংখ্যাটি ঋণাত্মক, আর যে সংখ্যার পরম মান ছোট সেই সংখ্যাটি ধনাত্মক হবে (-28) এর সম্ভাব্য উৎপাদক জোড়াগুলো হচ্ছে $-1, 28, 2, -14$ ও $4, -7$ এদের মধ্যে $4, -7$ এর সংখ্যাগুলোর সমষ্টি $= -7 + 4 = -3$

$$\begin{aligned} \therefore x^2 - 3x - 28 &= x^2 - 7x + 4x - 28 \\ &= x(x - 7) + 4(x - 7) \\ &= (x - 7)(x + 4) \end{aligned}$$

কাজ : উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

$$১. \quad x^2 - 18x + 72 \quad ২. \quad x^2 - 9x - 36 \quad ৩. \quad x^2 - 23x + 132$$

৪.৬ $ax^2 + bx + c$ আকারের রাশির উৎপাদক

$$\begin{aligned} \text{মনে করি, } ax^2 + bx + c &= (rx + p)(sx + q) \\ &= rsx^2 + (rq + sp)x + pq \end{aligned}$$

তাহলে, $a = rs$, $b = rq + sp$ এবং $c = pq$

সুতরাং, $ac = rspq = rq \times sp$ এবং $b = rq + sp$

এখন, $ax^2 + bx + c$ আকারের রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হলে, x^2 এর সহগ a এবং পদ ধ্রুবক c এর গুণফলকে এমন দুইটি উৎপাদকে প্রকাশ করতে হবে, যেন এদের বীজগণিতীয় যোগফল b এর সহগ b এর সমান হয় এবং a ও c এর গুণফলের সমান হয়।

$2x^2 + 11x + 15$ রাশিতিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হলে, $(2 \times 15) = 30$ কে এমন দুইটি উৎপাদকে প্রকাশ করতে হবে, যার যোগফল 11 এবং গুণফল 30 হয়।

30 এর উৎপাদক জোড়াসমূহ $1, 30, 2, 15, 3, 10$ ও $5, 6$ এর মধ্যে $5, 6$ জোড়াটির যোগফল $5 + 6 = 11$ এবং গুণফল $5 \times 6 = 30$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 11x + 15 &= 2x^2 + 5x + 6x + 15 \\ &= x(2x + 5) + 3(2x + 5) = (2x + 5)(x + 3) \end{aligned}$$

মন্তব্য : $ax^2 + bx + c$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষণের সময় $x^2 + px + q$ এর p, q এর ধনাত্মক ও ঋণাত্মক বিভিন্ন চিহ্নযুক্ত মানের জন্য যে নিয়ম অনুসরণ করা হয়েছে, a, b, c এর চিহ্নযুক্ত মানের জন্য একই নিয়ম অনুসরণ করতে হবে। এক্ষেত্রে p এর পরিবর্তে $-h$ এবং q এর পরিবর্তে $(a \times c)$ ধরতে হবে।

উদাহরণ ৭ : $2x^2 + 9x + 10$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : এখানে, $2 \times 10 = 20$ [x^2 এর সহগ ও ধ্রুবক পদের গুণফল]

$$\text{এখন, } 4 \times 5 = 20 \text{ এবং } 4 + 5 = 9$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 9x + 10 &= 2x^2 + 4x + 5x + 10 \\ &= 2x(x + 2) + 5(x + 2) = (x + 2)(2x + 5) \end{aligned}$$

উদাহরণ ৮ : $3x^2 + x - 10$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর

সমাধান : এখানে, $3 \times (-10) = -30$

এখন, $(-5) \times 6 = -30$ এবং $(-5) + 6 = 1$

$$3x^2 + x - 10 = 3x^2 + 6x - 5x - 10$$

$$= 3x(x + 2) - 5(x + 2)$$

$$= (x + 2)(3x - 5)$$

উদাহরণ ৯ : $4x^2 - 23x + 33$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ।

সমাধান : এখানে, $4 \times 33 = 132$

এখন, $(-11) \times (-12) = 132$ এবং $(-11) + (-12) = -23$

$$4x^2 - 23x + 33 = 4x^2 - 11x - 12x + 33$$

$$= x(4x - 11) - 3(4x - 11)$$

$$= (4x - 11)(x - 3)$$

উদাহরণ ১০ : $9x^2 - 9x - 4$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ।

সমাধান : এখানে, $9 \times (-4) = -36$

এখন, $3 \times (-12) = -36$ এবং $3 + (-12) = -9$

$$9x^2 - 9x - 4 = 9x^2 + 3x - 12x - 4$$

$$= 3x(3x + 1) - 4(3x + 1)$$

$$= (3x + 1)(3x - 4)$$

কাজ : উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

১ $8x^2 + 18x + 9$

২ $27x^2 + 15x + 2$

৩ $2a^2 - 6a - 20$

অনুশীলনী ৪.৩

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

- ১। $a^3 + 8$
- ২। $8x^3 + 343$
- ৩। $8a^4 + 27ab^3$
- ৪। $8x^3 + 1$
- ৫। $64a^3 - 125b^3$
- ৬। $729a^3 - 64b^3$
- ৭। $27a^3b^3 + 64b^3$
- ৮। $56x^3 - 189x^2$
- ৯। $3x^3 - 75x$
- ১০। $4x^3 - 1$
- ১১। $3ax^3 - 48a$
- ১২। $x^3 - 2ab + b^3 - p$
- ১৩। $16x^3 - a^3 - 6a - 9$
- ১৪। $8a^3 + ap^3$
- ১৫। $2a^3 + 16b^3$
- ১৬। $x^2 + y^2 - 2xy - 1$
- ১৭। $a^2 - 2ab + 2b - 1$
- ১৮। $x^4 - 2x^2 + 1$
- ১৯। $36 - 12x + x^2$
- ২০। $x^6 - y^6$
- ২১। $(x - y)^3 + z^3$
- ২২। $64x^3 - 8y^3$
- ২৩। $x^2 + 14x + 40$
- ২৪। $x^2 + 7x - 120$
- ২৫। $x^2 - 51x + 650$
- ২৬। $a^2 + 7ab + 12b^2$
- ২৭। $p^3 + 2pq - 80q^2$
- ২৮। $x^2 - 3xy - 40y^2$
- ২৯। $(x^2 - x)^2 + 3(x^2 - x) - 40$
- ৩০। $(a^2 + b^2)^2 - 18(a^2 + b^2) - 88$
- ৩১। $(a^2 + 7a)^2 - 8(a^2 + 7a) - 180$
- ৩২। $x^3 + (3x - 4b)x + (2a + 5ab + 3b)$
- ৩৩। $6x^3 - x - 15$
- ৩৪। $x^3 - x - (a + 1)a + 2$
- ৩৫। $3x^2 + 11x - 4$
- ৩৬। $3x^2 - 16x - 12$
- ৩৭। $2x^2 - 9x - 35$
- ৩৮। $2x^2 - 5xy + 2y^2$
- ৩৯। $x^3 - 8(x - y)^3$
- ৪০। $10p^2 + 11pq - 6q^2$
- ৪১। $2(x + y)^2 - 3(x + y) - 2$
- ৪২। $ax^2 + (a^2 + 1)x + a$
- ৪৩। $15x^2 - 11xy - 12y^2$
- ৪৪। $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - 2b^3$

৪.৭ বীজগণিতীয় রাশির গ.সা.ভ. ও ল.সা.ভ.

সমস্ত শ্রেণিতে অনূর্ধ্ব তিনটি বীজগণিতীয় রাশির সাংখ্যিক সহগসহ গ.সা.ভ. ও ল.সা.ভ. নির্ণয় সম্পর্কে সম্যক ধারণা দেওয়া হয়েছে। এখানে সংক্ষেপে এ সম্পর্কে পুনর্যালোচনা করা হলো।

সাধারণ গুণনীয়ক : যে রাশি দুই বা ততোধিক রাশির প্রত্যেকটির গুণনীয়ক, একে উক্ত রাশিগুলোর সাধারণ গুণনীয়ক (Common factor) বলা হয়। যেমন, ১১ , ১১ , ১১ , ১১ রাশিগুলোর সাধারণ গুণনীয়ক হলো ১১ ।

আবার, $(a - b)^2$, $(a + b)^2$, $(a^2 + b^2)$ রাশিগুলোর সাধারণ গুণনীয়ক $(a + b)$ ।

৪.৭.১ গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ.সা.ভ.)

দুই বা ততোধিক রাশির ভিতর যতগুলো মৌলিক সাধারণ গুণনীয়ক আছে, এদের সকলের গুণফলকে ঐ রাশিগুণ বা রাশিগুলোর গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক

(Highest Common Factor) বা সংক্ষেপে গ.সা.ও. (H.C.F.) বলা হয় যেমন, $a^3b^2c^3$, $a^5b^4c^4$ ও $a^4b^3c^2$ এই রাশি তিনটির গ.সা.ও. হবে $a^3b^2c^2$ ।

আবার, $(x+y)^2$, $(x+y)^3$ ও (x^2+y^2) এই তিনটি রাশির গ.সা.ও. $(x+y)$ ।

গ.সা.ও. নির্ণয়ের নিয়ম

প্রথমে পাটিগণিতের নিয়মে প্রদত্ত রাশিগুলোর সাংখ্যিক সহগের গ.সা.ও. নির্ণয় করতে হবে এরপর বীজগণিতীয় রাশিগুলোর মৌলিক উৎপাদক বের করতে হবে অতঃপর সাংখ্যিক সহগের গ.সা.ও. এবং প্রদত্ত রাশিগুলোর সর্বোচ্চ বীজগণিতীয় সাধারণ মৌলিক উৎপাদকগুলোর ধারাবাহিক গুণফলই হবে নির্ণেয় গ.সা.ও.

উদাহরণ ১। $9a^3b^2c^2$, $12a^2bc$ ও $15ab^3c^3$ এর গ.সা.ও. নির্ণয় কর।

সমাধান : 9, 12, 15 এর গ.সা.ও. = 3

a^3, a^2, a এর গ.সা.ও. = a

b^2, b, b^3 এর গ.সা.ও. = b

c^2, c, c^3 এর গ.সা.ও. = c

নির্ণেয় গ.সা.ও. = $3abc$

উদাহরণ ২। $x^3 - 2x^2$, $x^2 - 4$ ও $xy - 2y$ এর গ.সা.ও. নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, প্রথম রাশি $x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2)$

দ্বিতীয় রাশি $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

তৃতীয় রাশি $= xy - 2y = y(x - 2)$

রাশিগুলোতে সাধারণ উৎপাদক $(x - 2)$ এবং এর সর্বোচ্চ সাধারণ ঘাতযুক্ত উৎপাদক $(x - 2)$

গ.সা.ও. = $(x - 2)$

উদাহরণ ৩। $x^2(x - 1)$, $x^2(x^2 + x^3 + x^4 + 1)$ ও $(x^3)^2 - x^3 + x^4$ এর গ.সা.ও. নির্ণয় কর

সমাধান : এখানে, প্রথম রাশি $= x^2(x^2 - y^2)$

$$= x^2(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

দ্বিতীয় রাশি $= x^2y^2(x^4 + x^2y^2 + y^4)$

$$= x^2 \{ (x^2 + 1)^2 + 2x^2 \} = x^2 \{ (x^2 + 1)^2 + (x^2)^2 \}$$

$$= x^2 \{ (x^2 + 1)^2 + (x^2)^2 \}$$

$$= x^2 \{ (x^2 + 1 + x^2)(x^2 + 1 - x^2) \}$$

$$= x^2 (x^2 + x^2 + 1)(x^2 - x^2 + 1)$$

$$\text{তৃতীয় রাশি} = x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 = xy^2(x^2 + xy + y^2)$$

এখানে, প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশির সাধারণ উৎপাদক $xy^2(x^2 + xy + y^2)$

$$\text{ল.সা.ও.} = xy^2(x^2 + xy + y^2)$$

কাজ : ল.সা.ও. নির্ণয় কর :

$$১। 15a^3b^2c^4, 25a^2b^4c^3 \text{ এবং } 20a^4b^3c^2$$

$$২। (x+2)^2, (x^2+2x) \text{ এবং } (x^2+5x+6)$$

$$৩। 6a^2+3ab, 2a^3+5a^2-12a \text{ এবং } a^4-8a$$

সাধারণ গুণিতক : কোনো একটি রাশি অপর দুই বা ততোধিক রাশি দ্বারা মিলেমেয়ে বিভাজ্য হলে, ভাজকে গুণকবলি বা ভাজকগুলোর সাধারণ গুণিতক (Common Multiple) বলে যেমন, a^2b^2c রাশিটি $a, b, c, ab, bc, ca, a^2b, ab^2, a^2c, b^2c$ রাশিগুলোর প্রত্যেকটি দ্বারা বিভাজ্য। সুতরাং, a^2b^2c রাশিটি $a, b, c, ab, bc, ca, a^2b, a^2c, ab^2, b^2c$ রাশিগুলোর সাধারণ গুণিতক আবার $(a+b)(a-b)$ রাশিটি $(a+b), (a+b)^2$ ও (a^2-b^2) রাশি তিনটির সাধারণ গুণিতক।

৪.৭.২ লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল.সা.ও.)

দুই বা ততোধিক রাশির সম্ভাব্য সকল উৎপাদকের সর্বোচ্চ ঘাতের গুণফলকে রাশিগুলোর লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (Least Common Multiple) বা সংক্ষেপে ল.সা.ও. (L.C.M.) বলা হয়।

যেমন, x^2y^2z রাশিটি x^2yz, xy^2z ও xyz রাশি তিনটির ল.সা.ও.

আবার $(1+1)^2(1-1)$ রাশিটি $(1+1), (1+1)^2$ ও $(1-1)^2$ রাশি তিনটির ল.সা.ও.

ল.সা.ও. নির্ণয়ের নিয়ম

প্রথমে প্রদত্ত রাশিগুলোর সংখ্যিক সহগের ল.সা.ও. নির্ণয় করতে হবে।

এরপর সাধারণ উৎপাদকের সর্বোচ্চ ঘাত নেব করতে হবে। অতঃপর উভয়ের গুণফলই হবে প্রদত্ত রাশিগুলোর ল.সা.ও.।

উদাহরণ ৪। $4a^2bc, 8ab^2c$ ও $6a^2b^2c$ এর ল.সা.ও. নির্ণয় কর।

সামাধান : এখানে, ৪, ৮ ও ৬ এর ল.সা.ও. = ২৪

প্রদত্ত রাশিগুলোর সর্বোচ্চ সাধারণ ঘাতের উৎপাদক যথাক্রমে a^2, b^2, c

$$\therefore \text{ল.সা.ও.} = 24a^2b^2c$$

উদাহরণ ৫ : $x^3 + x^2, x^2 + x, x + 1$ এবং $(x + 1)^3$ এর ল.সা.ও নির্ণয় কর

সমাধান : এখানে, প্রথম রাশি $x^3 + x^2 = x^2(x + 1)$

দ্বিতীয় রাশি $= x^2 + x = x(x + 1)$

তৃতীয় রাশি $= x^2 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

চতুর্থ রাশি $= (x + 1)^3 = (x + 1)(x + 1)(x + 1)$

ল.সা.ও. $= x^2(x + 1)(x^2 - x + 1)(x + 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

উদাহরণ ৬ : $4(x^2 + ax), 6(x^3 - a^2x)$ ও $14x(x^3 - a^3)$ এর ল.সা.ও নির্ণয় কর

সমাধান : এখানে, প্রথম রাশি $= 4(x^2 + ax)^2 = 2 \times 2 \times x^2(x + a)^2$

দ্বিতীয় রাশি $= 6(x^3 - a^2x) = 2 \times 3 \times x(x^2 - a^2) = 2 \times 3 \times x(x + a)(x - a)$

তৃতীয় রাশি $= 14x^3(x^3 - a^3) = 2 \times 7 \times x^3(x - a)(x^2 + ax + a^2)$

∴ ল.সা.ও. $= 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times x^3(x + a)(x - a)(x^2 + ax + a^2)$

$= 84x^3(x + a)^2(x^2 - a^2)$

কাজ : ল.সা.ও. নির্ণয় কর :

১। $5x^3y, 10x^2y, 20x^4y^2$

২। $x^2 - 1, x^2 - 2(x + 1), 2x - 1 + 2x^2$

৩। $a^3 - 1, a^3 + 1, a^4 + a^2 + 1$

অনুশীলনী ৪.৪

১। $-5 - y$ এর বর্গ নিচের কোনটি?

ক) $y^2 + 10y + 25$

খ) $y^2 - 10y + 25$

গ) $25 - 10y + y^2$ ঘ) $y^2 - 10y - 25$

২। $(x - 2)$ ও $(4x + 3)$ এর গুণফল নিচের কোনটি?

ক) $4x^2 - 5x + 6$

খ) $4x^2 - 11x - 6$

গ) $4x^2 + 5x - 6$

ঘ) $4x^2 - 5x - 6$

৩। $x^2 - 2x - 3$ ও $x^2 + 2x - 3$ এর গ.সা.ও. কত?

ক) $x + 1$

খ) $x - 1$

গ) 1

ঘ) 0

৪। $(3x - 5)(5 + 3x)$ কে দুইটি রাশির বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করলে নিচের কোনটি সঠিক?

- ক) $3x^2 - 25$ খ) $9x^2 - 5$ গ) $(3x)^2 - 5^2$ ঘ) $9x^2 - 25$

◆ নিচের তথ্যের আলোকে (৫-৭) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$x = \sqrt{3}y + 1 \quad 1, \text{ হলে}$$

৫। $x + \frac{1}{x}$ এর মান নিচের কোনটি?

- ক) $-\sqrt{3}x$ খ) $\sqrt{3}x$ গ) $-\sqrt{3}$ ঘ) $\sqrt{3}$

৬। $y - \frac{1}{y^2}$ এর মান নিচের কোনটি?

- ক) 1 খ) 5 গ) 7 ঘ) 11

৭। $x^3 + \frac{1}{x^3}$ এর মান নিচের কোনটি?

- ক) 12 খ) $6\sqrt{3}$ গ) $3\sqrt{3} + 3$ ঘ) 0

৮। $x^2 - x - 30$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষিতরূপ নিচের কোনটি?

- ক) $(x - 5)(x + 6)$ খ) $(x + 5)(x - 6)$ গ) $(x - 5)(x - 6)$ ঘ) $(x + 5)(x + 6)$

৯। $x^2 - 10x + 21$ ও $x^2 - 6x - 7$ দুইটি বীজগণিতিক রাশি হলে

- i. রাশি দুইটির গ.সা.ও $x - 7$
ii. রাশি দুইটির ল.সা.ও $(x + 1)(x - 3)(x - 7)$
iii. রাশি দুইটির গুণফল $x^4 - 60x^2 - 147$
নিচের কোনটি সঠিক?

- ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

১০। বীজগণিতের সূত্রাবলিতে

$$I. \quad x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$II. \quad ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$III. \quad x^3 + y^3 = (x + y)^3 + 3xy(x + y)$$

উপরের তথ্য অনুযায়ী নিচের কোনটি সঠিক?

- ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

১১। $x + y = 5$ এবং $x - y = 3$ হলে,

(১) $x^2 + y^2$ এর মান কত ?

(ক) 15 (খ) 16 (গ) 17 (ঘ) 18

(২) xy এর মান কত ?

(ক) 10 (খ) 8 (গ) 6 (ঘ) 4

(৩) $x^2 - y^2$ এর মান কত ?

(ক) 13 (খ) 14 (গ) 15 (ঘ) 16

১২। $x + \frac{1}{x} = 2$ হলে,

(১) $\left(x - \frac{1}{x}\right)$ এর মান কত ?

(ক) 0 (খ) 1 (গ) 2 (ঘ) 4

(২) $x^3 + \frac{1}{x^3}$ এর মান কত ?

(ক) 1 (খ) 2 (গ) 3 (ঘ) 4

(৩) $x^4 + \frac{1}{x^4}$ এর মান কত ?

(ক) 8 (খ) 6 (গ) 4 (ঘ) 2

গ.সা.ক. নির্ণয় কর (১৩-২০) :

১৩। $36a^2b^2c^4d^5$, $54a^3c^2d^4$ এবং $90a^4b^3c^2$

১৪। $20x^3y^2a^3b^4$, $15x^4y^3a^4b^3$ এবং $35x^2y^4a^3b^2$

১৫। $15x^2y^3z^4a^3$, $12x^3y^2z^3a^4$ এবং $27x^3y^4z^5a^7$

১৬। $18a^3b^4c^5$, $42a^4c^3d^4$, $60b^3c^4d^5$ এবং $78a^2b^4d^3$

১৭। $x^2 - 3x$, $x^2 - 9$ এবং $x^2 - 4x + 3$

১৮। $18(x + y)^3$, $24(x + y)^2$ এবং $32(x^2 - y^2)$

ফর্ম-১০, গণিত-অষ্টম শ্রেণি (দাবিল)

১৯। $a^2b(a^3 - b^3)$, $a^2b^2(a^3 + a^2b^2 + b^4)$ এবং $a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4$

২০। $a^3 - 3a^2 - 10a$, $a^3 + 6a^2 + 8a$ এবং $a^4 - 5a^3 - 14a^2$

ল.সা.গু. নির্ণয় কর (২১-২৮) :

২১। a^4b^2c , ab^3c^2 এবং $a^7b^4c^3$

২২। $5a^2b^3c^2$, $10ab^2c^3$ এবং $15ab^3c$

২৩। $3x^3y^2$, $4xy^3z$, $5x^4y^2z^2$ এবং $12xy^4z^2$

২৪। $3a^2d^3$, $9d^2h^2$, $12c^3d^2$, $24a^3h^2$ এবং $36c^3d^2$

২৫। $x^2 + 3x + 2$, $x^2 - 1$ এবং $x^2 + x - 2$

২৬। $x^2 - 4$, $x^2 + 4x + 4$ এবং $x^3 - 8$

২৭। $6x^2 - x - 1$, $3x^2 + 7x + 2$ এবং $2x^2 + 3x - 2$

২৮। $a^3 + b^3$, $(a + b)^3$, $(a^2 - b^2)^2$ এবং $(a^2 - ab + b^2)^2$

২৯। $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ১ হলে,

(ক) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ এর মান নির্ণয় কর

(খ) $\frac{x^6 + 1}{x}$ এর মান কত ?

(গ) $x - \frac{1}{x}$ এর মান নির্ণয় কর

৩০। $3x - 5y + 3z$ এবং $3x + 5y - z$ দুইটি বীজগাণিতিক রাশি।

ক) ১ম রাশিটির বর্গ নির্ণয় কর।

খ) রাশি দুইটির গুণফলকে দুইটি রাশির বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর

গ) ২য় রাশিটির মান শূন্য হলে প্রমাণ কর যে, $27x^3 + 125y^3 + 45xy \neq z^3$

৩১। $P = 3x^2 - 6x - 12$, $Q = 3x - 5x + 2$, $R = 3x^2 - x - 2$ তিনটি বীজগাণিতিক রাশি

ক) উৎপাদকে বিশ্লেষণ বলতে কী বুঝায়?

খ) $Q = 0$ এবং $x \neq 0$ হলে $9x^2 + \frac{4}{x^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ) P, Q, R এর ল.সা.গু নির্ণয় কর।

পঞ্চম অধ্যায়

বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ

এই অধ্যায়ের পূর্বেজন্মিত পটভূমি বইয়ের শেষে পরিচিতি অংশে সংকলিত আছে। প্রথমে পরিচিতি অংশ পড়ে আলোচনা করতে হবে। আমরা দৈনন্দিন জীবনে একটি সম্পূর্ণ ক্রমিকের সাথে এর অংশও ব্যবহার করি। এই বিভিন্ন অংশ এক একটি ভগ্নাংশ। সঙ্ক্ষম শ্রেণিতে আমরা বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ কী তা জেনেছি এবং ভগ্নাংশের লঘুকরণ ও সাধারণ হ্রস্বীকরণ শিখেছি। ভগ্নাংশের যোগ, বিয়োগ ও সরলীকরণ সম্পর্কে বিশদভাবে জেনেছি। এ অধ্যায়ে ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ সম্পর্কে পুনরাবলোচনা এবং ভগ্নাংশের গুণ, ভাগ ও সরলীকরণ সম্পর্কে বিশদ আলোচনা করা হয়েছে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা—

- বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ করতে পারবে এবং এতদসংক্রান্ত সরল ও সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

৫.১ বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ

যদি m ও n দুইটি বীজগণিতীয় রাশি হয় তবে $\frac{m}{n}$ একটি বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ, যেখানে $n \neq 0$ । এখানে m ভগ্নাংশটির m কে লব ও n কে হর বলা হয়।

উদাহরণস্বরূপ, $\frac{a^2 - b^2}{a + b}$ ইত্যাদি বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ।

৫.২ ভগ্নাংশের লঘিষ্ঠকরণ

কোনো বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের লব ও হরের সাধারণ গুণনীয়ক থাকলে ভগ্নাংশটির লব ও হরের গ সা গু, দিয়ে লব ও হরকে ভাগ করলে, লব ও হরের ভাগফল দ্বারা গঠিত নতুন ভগ্নাংশটিই হবে প্রদত্ত ভগ্নাংশটির লঘিষ্ঠকরণ।

$$\begin{aligned} \text{যেমন, } \frac{a^3b^2 - a^2b^3}{a^2b - ab^2} &= \frac{a^2b^2(a-b)}{ab(a-b)} \\ &= \frac{a^2b^2(a-b)}{ab(a-b)} \\ &= \frac{ab(a-b)}{ab(a-b)} \\ &= \frac{ab}{ab} \\ &= 1 \end{aligned}$$

এখানে লব ও হরের গ সা গু, $ab(a-b)$ দ্বারা লব ও হরকে ভাগ করে লঘিষ্ঠকরণ করা হয়েছে।

৫.৩ ভগ্নাংশকে সাধারণ হ্রস্বীকরণ

দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশকে সাধারণ হ্রস্বীকরণ করতে নিচের ধাপগুলো অনুসরণ করতে হবে -

১. হরগুলোর ল.সা.গু. নির্ণয় করতে হবে।
- ২। ভগ্নাংশের হর দিয়ে ল.সা.গু. কে ভাগ করতে হবে।
৩. হর দিয়ে ল.সা.গু. কে ভাগ করা হলে যে ভাগফল পাওয়া যাবে, সেই ভাগফল দ্বারা ঐ ভগ্নাংশের লব ও হরকে গুণ করতে হবে।

যেমন, $\frac{x}{1} \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{m}{n}$ তিনটি ভগ্নাংশ, এদের একই হরবিশিষ্ট করতে হবে

এখানে তিনটি ভগ্নাংশের হর যথাক্রমে y , h ও n এদের ল.সা.গু. $= \sqrt{hmn}$

১ম ভগ্নাংশ $\frac{x}{1}$ এর হর y y দ্বারা ল.সা.গু. \sqrt{hmn} কে ভাগ করলে ভাগফল hn , এখন hn দ্বারা $\frac{x}{1}$ ভগ্নাংশের

লব ও হরকে গুণ করতে হবে।

$$\frac{x}{1} \cdot \frac{hn}{hn} = \frac{xhn}{hn}$$

একইভাবে, ২য় ভগ্নাংশ $\frac{1}{h}$ এর হর h h দ্বারা ল.সা.গু. \sqrt{hmn} কে ভাগ করলে ভাগফল \sqrt{mn} ।

$$\frac{1}{h} = \frac{1 \times \sqrt{mn}}{h \times \sqrt{mn}} = \frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{hmn}}$$

৩য় ভগ্নাংশ $\frac{m}{n}$ এর হর n n দ্বারা ল.সা.গু. \sqrt{hmn} কে ভাগ করলে ভাগফল \sqrt{h}

$$\frac{m}{n} = \frac{m \times \sqrt{h}}{n \times \sqrt{h}} = \frac{m\sqrt{h}}{\sqrt{hmn}}$$

অতএব, $\frac{x}{1} \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{m}{n}$ এর সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশ যথাক্রমে $\frac{xhn}{\sqrt{hmn}}$, $\frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{hmn}}$ ও $\frac{m\sqrt{h}}{\sqrt{hmn}}$

উদাহরণ ১। নিচের ভগ্নাংশ দুইটিকে সঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ কর

$$\text{ক)} \quad \frac{16a^2b^3c^4y}{8a^3b^2c^5x} \quad (\text{খ}) \quad \frac{a(a^2+2ab+b^2)(a^3-b^3)}{(a^3+b^3)(a^4b-b^4)}$$

$$\text{সমাধান : (ক) প্রদত্ত ভগ্নাংশ} \quad \frac{16a^2b^3c^4y}{8a^3b^2c^5x}$$

এখানে, ১৬ ও ৮ এর গ.সা.গু. হলো ৮

$$\begin{array}{ll} a^2 \text{ ও } a^3 & = a^2 \\ b^3 \text{ ও } b^2 & = b \\ c^4 \text{ ও } c^5 & = c^4 \\ 1 \text{ ও } x & = 1 \end{array}$$

$16a^2b^3c^4y$ ও $8a^3b^2c^5x$ এর গ.সা.ভ. হলো $8a^2b^2c^4$

$$\begin{aligned} \frac{16a^2b^3c^4y}{8a^2b^2c^4} & \text{ এর লব ও হরকে } 8a^2b^2c^4 \text{ দ্বারা ভাগ করে পাওয়া যায় } \frac{2b}{acx} \\ \frac{16a^2b^3c^4y}{8a^2b^2c^4} & \text{ এর লঘিষ্ঠ আকার হলো } \frac{2by}{acx} \end{aligned}$$

$$(খ) \text{ প্রদত্ত উৎপাদনটি } \frac{a(a^2 + 2ab + b^2)(a^3 - b^3)}{(a^3 + b^3)(a^2b - b^3)}$$

$$\text{এখানে, লব} = a(a^2 + 2ab + b^2)(a^3 - b^3)$$

$$= a(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$\text{হর} = (a^3 + b^3)(a^2b - b^3)$$

$$= (a+b)(a^2 - ab + b^2)(b(a^2 - b^2))$$

$$= b(a+b)(a^2 - ab + b^2)(a-b)(a+b)$$

$$= b(a+b)(a-b)(a^2 - ab + b^2)(a+b)$$

$$= b(a+b)^2(a-b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\text{লব ও হরের গ.সা.ভ.} = (a+b)^2(a-b)$$

$$\text{প্রদত্ত উৎপাদনটির লব ও হরকে } (a+b)^2(a-b) \text{ দ্বারা ভাগ করে পাওয়া যায় } \frac{a(a^2 + ab + b^2)}{b(a^2 + b^2)(a - ab + b^2)}$$

$$\text{উৎপাদনটির লঘিষ্ঠ রূপ} = \frac{a(a^2 + ab + b^2)}{b(a^2 + b^2)(a - ab + b^2)}$$

$$\text{উদাহরণ ২} \quad \frac{x^m}{x^m - 1} = \frac{a^m}{a^m - b^m} \quad \text{কে সাধারণ হ্রস্ববিশিষ্ট উৎপাদনে পরিণত কর}$$

$$\text{সমাধান} \quad \text{এখানে প্রদত্ত উৎপাদনগুলো} \quad \frac{x^m}{x^m - 1} = \frac{a^m}{a^m - b^m} \quad \text{কে সাধারণ হ্রস্ববিশিষ্ট উৎপাদনে পরিণত কর}$$

$$\begin{aligned} \text{এখানে, ১য় উৎপাদনের হর} &= x^m - 1 \\ &= (x^n)^m - 1 \end{aligned}$$

$$\text{২য় উৎপাদনের হর} = xy(a^2 - b^2)$$

$$\begin{aligned} \text{৩য় উৎপাদনের হর} &= m^2n - mn^2 \\ &= mn(m^2 - n^2) \end{aligned}$$

$$\text{হরগুলোর গ.সা.ভ.} = xy(x^2 - 1)(a^2 - b^2)(m^2 - n^2)$$

অতএব,
$$\frac{x^3y - xy^3}{x^2y - xy^2} = \frac{x(x^2 - y)(x + y)(a - b)(m - n)}{x(x - y)(x + y)(a - b)(m - n)}$$

এবং
$$\frac{a}{x(x - y)} = \frac{a(x + y)(m - n)}{x(x - y)(x + y)(a - b)(m - n)}$$

নির্ণেয় ভগ্নাংশগুলো
$$\frac{x(x - y)(x + y)(a - b)(m - n)}{x(x - y)(x + y)(a - b)(m - n)} = \frac{a(x + y)(m - n)}{x(x - y)(x + y)(a - b)(m - n)}$$

ও
$$\frac{ym(x - y)(a - b)}{x(x - y)(x + y)(a - b)(m - n)}$$

কাজ : সমস্রবিশিষ্ট ভগ্নাংশে প্রকাশ কর :

১। $\frac{x^4 + xy}{x^2y}$ এবং $\frac{x^2 - xy}{xy^2}$ ২। $\frac{a - b}{a + 2b}$ এবং $\frac{2a + b}{a^2 - 4b}$

৫.৪ ভগ্নাংশের যোগ

দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশের যোগ করতে হবে। ভগ্নাংশগুলোকে সাধারণ হরবিশিষ্ট করে লবগুলোকে যোগ করলে যোগফল হবে একটি নতুন ভগ্নাংশ, যার লব হবে সাধারণ হরবিশিষ্টকরণকৃত ভগ্নাংশগুলোর লবের যোগফল এবং হর হবে ভগ্নাংশগুলোর হরের ল.সা.ও.।

যেমন,
$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{ay + bx}{xy}$$

উদাহরণ ৩ ভগ্নাংশ তিনটি যোগ কর
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x + y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x + y}$$

এখানে ১ম ভগ্নাংশ
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

২য় ভগ্নাংশ
$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

৩য় ভগ্নাংশ
$$\frac{1}{x + y} = \frac{1}{x + y}$$

হরগুলোর ল.সা.ও. = $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = (x^3 - y^3)$

সুতরাং, $\frac{1}{x^2 - y^2} = \frac{1}{(x - y)(x + y)}$ এর যোগফল

$$= \frac{1}{x - y} \cdot \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} + \frac{1}{x + y} \cdot \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$$

$$= \frac{x^2 + xy + y^2}{(x - y)(x^2 + xy + y^2)} + \frac{x(x - y)}{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}$$

$$= \frac{x^2 + xy + y^2}{(x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)} + \frac{x(x - y)}{(x + y)(x - y)(x^2 - xy + y^2)}$$

$$= \frac{x^2 + xy + y^2}{(x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)} + \frac{x}{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}$$

$$= \frac{2(x^2 + xy + y^2)}{(x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)}$$

নির্ণেয় যোগফল $\frac{2(x^2 + xy + y^2)}{(x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)}$

উদাহরণ ৪। যোগফল বের কর : $\frac{3a}{a^2 + 3a - 4} + \frac{2a}{a^2 - 1} + \frac{a}{a^2 + 5a + 4}$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি, $\frac{3a}{a^2 + 3a - 4} + \frac{2a}{a^2 - 1} + \frac{a}{a^2 + 5a + 4}$

$$= \frac{3a}{a^2 + 4a - a - 4} + \frac{2a}{(a + 1)(a - 1)} + \frac{a}{a^2 + a + 4a + 4}$$

$$= \frac{3a}{(a + 4)(a - 1)} + \frac{2a}{(a + 1)(a - 1)} + \frac{a}{(a + 1)(a + 4)}$$

$$= \frac{3a(a + 1) + 2a(a + 4) + a(a - 1)}{(a + 4)(a + 1)(a - 1)}$$

$$= \frac{3a^2 + 3a + 2a^2 + 8a + a^2 - a}{(a + 4)(a + 1)(a - 1)}$$

$$= \frac{6a^2 + 10a}{(a + 4)(a + 1)(a - 1)}$$

$$= \frac{2a(3a + 5)}{(a + 4)(a^2 - 1)}$$

উদাহরণ ৫। যোগফল নির্ণয় কর

(ক) $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}$

(খ) $\frac{1}{a^2 - 5a + 6} + \frac{1}{a^2 - 9} + \frac{1}{a^2 + 4a + 3}$

(গ) $\frac{1}{a-2} + \frac{a+2}{a^2 + 2a + 4}$

সমাধান: (ক) $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}$

$$= \frac{a^2}{abc} + \frac{ab + b^2 - bc + c^2 - ca}{abc}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{abc}$$

(খ) $\frac{1}{a^2 - 5a + 6} + \frac{1}{a^2 - 9} + \frac{1}{a^2 + 4a + 3}$

$$= \frac{1}{a^2 - 2a - 3a + 6} + \frac{1}{(a+3)(a-3)} + \frac{1}{a^2 + 3a + a + 3}$$

$$= \frac{1}{a(a-2) - 3(a-2)} + \frac{1}{(a+3)(a-3)} + \frac{1}{a(a+3) + 1(a+3)}$$

$$= \frac{1}{(a-2)(a-3)} + \frac{1}{(a+3)(a-3)} + \frac{1}{(a+3)(a+1)}$$

$$= \frac{(a+1)(a+3) + (a+1)(a-2) + (a-2)(a-3)}{(a+1)(a-2)(a+3)(a-3)}$$

$$= \frac{a^2 + 4a + 3 + a^2 - a - 2 + a^2 - 5a + 6}{(a+1)(a-2)(a+3)(a-3)}$$

$$= \frac{3a^2 - 2a + 7}{(a+1)(a-2)(a^2 - 9)}$$

(গ) $\frac{1}{a-2} + \frac{a+2}{a^2 + 2a + 4}$

$$= \frac{a^2 + 2a + 4 + (a-2)(a+2)}{(a-2)(a^2 + 2a + 4)}$$

$$\frac{a^2 + 2a + 4 + a^2 - 4}{a - 8}$$

$$\frac{2a^2 + 2a}{a - 8}$$

$$\frac{2a(a+1)}{a^3 - 8}$$

কাজ : যোগ কর :

$$\therefore \frac{2a}{3x^2y} + \frac{3h}{2xy^2} + \frac{a+h}{xy} = \frac{2}{3x^2y} + \frac{3}{2xy^2} + \frac{1}{xy}$$

৫.৫ ভগ্নাংশের বিয়োগ

দুইটি ভগ্নাংশের বিয়োগ করতে হলে, ভগ্নাংশ দুইটিকে সাধারণ হরবিশিষ্ট করে লব দুইটিকে বিয়োগ করলে বিয়োগফল হবে একটি নতুন ভগ্নাংশ, যার লব হবে সাধারণ হরবিশিষ্টকরণকৃত ভগ্নাংশ দুইটির লবের বিয়োগফল এবং হর হবে ভগ্নাংশ দুইটির হরের ল.সা.গ.।

$$\begin{aligned} \text{যেমন, } \frac{a}{xy} - \frac{b}{yz} &= \frac{az}{xyz} - \frac{bx}{xyz} \\ &= \frac{az - bx}{xyz} \end{aligned}$$

উদাহরণ ৬ বিয়োগফল নির্ণয় কর

$$(ক) \frac{x}{4a^2bc^2} - \frac{y}{9abh^2}$$

$$(খ) \frac{x}{(x-1)^2} - \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$(গ) \frac{a^2+9}{a^2-9y^2} - \frac{a-3}{a+3}$$

$$\text{সমাধান : (ক) } \frac{x}{4a^2bc^2} - \frac{y}{9abh^2}$$

এখানে, হর $4a^2bc^2$ ও $9ab^2c^3$ এর ল.সা.গ. $36a^2b^2c^3$

$$\begin{aligned} \frac{x}{4a^2bc^2} - \frac{y}{9abh^2} &= \frac{9xhc}{36a^2b^2c^3} - \frac{4yc}{36a^2b^2c^3} \\ &= \frac{9xhc - 4yc}{36a^2b^2c^3} \end{aligned}$$

$$(খ) \frac{x}{(x-y)^2} - \frac{x+y}{x^2-y^2}$$

এখানে হর $(x-y)^2$ ও x^2-y^2 এর ল.সা.ও. $(x-y)^2(x+y)$

$$\frac{x}{(x-y)^2} = \frac{x(x+y)}{(x-y)^2(x+y)}$$

$$\frac{x(x+y)}{(x-y)^2(x+y)}$$

$$\frac{x^2+xy}{(x-y)^2(x+y)}$$

$$\frac{x^2+xy}{(x-y)^2(x+y)}$$

$$\frac{x^2+xy}{(x-y)^2(x+y)}$$

$$\frac{xy+y^2}{(x-y)^2(x+y)}$$

$$= \frac{y(x+y)}{(x-y)^2(x+y)}$$

$$\frac{y}{(x-y)^2}$$

$$(গ) \frac{a^2+9y^2}{a^2-9y^2} - \frac{a-3y}{a+3y}$$

এখানে হর a^2-9y^2 ও $a+3y$ এর ল.সা.ও. a^2-9y^2

$$\frac{a^2+9y^2}{a^2-9y^2} = \frac{(a^2+9y^2)(a+3y)}{(a^2-9y^2)(a+3y)}$$

$$\frac{a^2+9y^2}{a^2-9y^2} = \frac{(a^2+9y^2)(a+3y)}{(a^2-9y^2)(a+3y)}$$

$$= \frac{a^2+9y^2-(a-3y)(a+3y)}{a^2-9y^2}$$

$$= \frac{a^2+9y^2-(a^2-6ay+9y^2)}{a^2-9y^2}$$

$$= \frac{a^2+9y^2-a^2+6ay-9y^2}{a^2-9y^2}$$

$$\frac{6ay}{a^2-9y^2}$$

কাজ : বিশ্লেষণ কর

$$১ \quad \frac{1}{1^2+1^2+1^2} \quad \text{থেকে} \quad \frac{1}{1^2+1^2} \quad ২ \quad \frac{1}{1+a+a^2} \quad \text{থেকে} \quad \frac{2a}{1+a^2+a^4}$$

লক্ষণীয়, বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ করার সময় প্রয়োজন হলে প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলোকে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করে নিতে হবে।

যেমন, $\frac{a^2bc}{abc^2} + \frac{ab^2c}{abc^2} + \frac{abc^2}{a^2bc}$

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \\ &= \frac{a \times ca}{b \times ca} + \frac{b \times ab}{c \times ab} + \frac{c \times bc}{a \times bc} \quad [\text{হর } b, c, a \text{ এর ল.সা.গ. } abc] \\ &= \frac{ca^2}{abc} + \frac{ab^2}{abc} + \frac{bc^2}{abc} \\ &= \frac{ca^2 + ab^2 + bc^2}{abc} \end{aligned}$$

উদাহরণ ৭। সরল কর :

(ক) $\frac{x-y}{(y+z)(z+x)} + \frac{y-z}{(x+y)(z+x)} + \frac{z-x}{(x+y)(y+z)}$

(খ) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} - \frac{4}{x^2-4}$

(গ) $\frac{1}{1-a+a^2} - \frac{1}{1+a+a^2} - \frac{2a}{1+a^2+a^4}$

সমাধান : (ক) $\frac{x-y}{(y+z)(z+x)} + \frac{y-z}{(x+y)(z+x)} + \frac{z-x}{(x+y)(y+z)}$

এখানে হর $(y+z)(z+x)(x+y)(z+x)$ ও $(x+y)(y+z)$ এর ল.সা.গ. $(y+z)(z+x)$

$$\frac{(x-y)(x+y)(z+x)}{(y+z)(z+x)(x+y)(z+x)} + \frac{(y-z)(x+y)}{(x+y)(z+x)(x+y)} + \frac{(z-x)(y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\frac{(x-y)(x+y) + (y-z)(x+y) + (z-x)(y+z)}{(x+y)(z+x)(y+z)}$$

$$\frac{x^2 - y^2 + y^2 - z^2 + z^2 - x^2}{(x+y)(z+x)(y+z)}$$

$$= \frac{0}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$= 0$$

$$\begin{aligned}
 (\text{খ}) \quad & \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} - \frac{4}{x^2+4} \\
 & \frac{x+2-x-2}{(x-2)(x+2)} - \frac{4}{x^2+4} \\
 & \frac{4}{x^2-4} - \frac{4}{x^2+4} \\
 & 4 \left[\frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x^2+4} \right] \\
 & = 4 \left[\frac{x^2+4-x^2-4}{(x^2-4)(x^2+4)} \right] \\
 & = \frac{4 \times 8}{(x^2-4)(x^2+4)} \\
 & \quad 32 \\
 & x^4 - 16
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{গ}) \quad & \frac{1}{1+a+a^2} - \frac{1}{1+a+a^2} - \frac{2a}{1+a^2+a^4} \\
 \text{এখানে, } & 1+a^2+a^4 = 1+2a^2+a^4-a^2 \\
 & \quad (1+a^2)^2 - a^2 \\
 & \quad (1+a^2+a)(1+a^2-a) \\
 & = (a^2+a+1)(a^2-a+1)
 \end{aligned}$$

এখানে দ্বিঃ $1-a+a^2$, $1+a+a^2$ ও $1+a^2+a^4$ এর লস ও $(1+a+a^2)(1-a+a^2)$
 $= 1+a^2+a^4$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{1-a+a^2} - \frac{1}{1+a+a^2} - \frac{2a}{1+a^2+a^4} \\
 & \frac{1+a+a^2-1-a-a^2}{1-a^2+a^4} - \frac{2a}{1+a^2+a^4} \\
 & \quad 0 \\
 & \frac{0}{1+a^2+a^4} \\
 & 0
 \end{aligned}$$

অনুশীলনী ৫.১

১। লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ কর :

(ক) $\frac{4x^2y^3z^5}{9x^5y^2z^3}$

(খ) $\frac{16(2v)^4 \cdot 3v^6}{(3x)^3 \cdot (2v)^6}$

(গ) $\frac{x^4y + xy^3}{x^2y^3 + x^3y^2}$

(ঘ) $\frac{(a-b)(a+b)}{a^3 - b^3}$

(ঙ) $\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25}$

(চ) $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9x + 20}$

(ছ) $\frac{(x^2 - y^2)(x^2 - x + y^2)}{(x^2 - y^2)(x^3 + y^3)}$

(জ) $\frac{a^2 - b^2 - 2bc - c^2}{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}$

২। সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে প্রকাশ কর :

(ক) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{z}{2x}$

(খ) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{z - 1}{z}$

(গ) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{z}{x(x+1)}$

(ঘ) $\frac{x^2 - 1}{(x-y)^2} = \frac{x^2 - 1}{x^3 + y^3} = \frac{z}{x^2 - 1}$

(ঙ) $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{(a+b)(a+b)} = \frac{c}{a+b}$

(চ) $\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x^2 - 7x + 12} = \frac{1}{x^2 - 9x + 20}$

(ছ) $\frac{a-b}{a-b} = \frac{c-c}{c-a}$

(জ) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{z}{z+1}$

৩। যোগফল নির্ণয় কর

(ক) $\frac{a-b}{a} + \frac{a+b}{b}$

(খ) $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}$

(গ) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{z}{c}$

(ঘ) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{z}{x+1}$

(ঙ) $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 4x + 3} + \frac{1}{x^2 - 5x + 4}$

$$(চ) \frac{1}{a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + ab + b^2} - \frac{1}{a^2 - ab + b^2}$$

$$(ছ) \frac{1}{x^2 - 2} + \frac{1}{x^2 + 2} + \frac{4}{x^2 - 4}$$

$$(জ) \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{4}{x^2 - 1}$$

৪. বিয়োগফল নির্ণয় কর

$$(ক) \frac{a}{x - 3} - \frac{a}{x - 9}$$

$$(খ) \frac{1}{x(x - 1)} - \frac{1}{x(x + 1)}$$

$$(গ) \frac{x + 1}{1 + x + x^2} - \frac{x - 1}{1 - x + x^2}$$

$$(ঘ) \frac{a^2 + 16b^2}{a - 16b} - \frac{a - 4b}{a + 4b}$$

$$(ঙ) \frac{1}{x - 1} - \frac{x - x + 1}{x + 1}$$

৫. সরল কর

$$(ক) \frac{x^2 - 1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x^2 - 1}{2x}$$

$$(খ) \frac{x - y}{(x + y)(y + z)} + \frac{y - z}{(y + z)(z + x)} + \frac{z - x}{(z + x)(x + y)}$$

$$(গ) \frac{y}{(x - 1)(x - z)} + \frac{x}{(z - 1)(x - 1)} + \frac{z}{(x - 1)(z - 1)}$$

$$(ঘ) \frac{1}{x + 3} + \frac{1}{x - 3} - \frac{2x}{x^2 - 9}$$

$$(ঙ) \frac{1}{x - 3} - \frac{2}{2x + 3} + \frac{1}{x + 3} - \frac{2}{2x - 3}$$

$$(চ) \frac{1}{x - 2} - \frac{x - 2}{x^2 + 2x + 4} + \frac{6x}{x^2 + 8}$$

$$(ছ) \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} - \frac{2}{x^2 + 1} + \frac{4}{x^4 + 1}$$

$$(জ) \frac{1}{(x - 2)(x - 1)} + \frac{1}{(z - 1)(x - 1)} + \frac{x - 1}{(x - 1)(x - z)}$$

$$(ঝ) \frac{1}{a - b - c} + \frac{1}{a - b + c} + \frac{a}{a^2 + b^2 - c^2} - 2ab$$

$$(ঞ) \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab} + \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2 + 2ca}$$

৫.৬ ভগ্নাংশের গুণ

দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশ গুণ করে একটি ভগ্নাংশ পাওয়া যায় যার লব হবে ভগ্নাংশগুলোর লবের গুণফলের সমান এবং হর হবে ভগ্নাংশগুলোর হরের গুণফলের সমান। এক্ষেপে ভগ্নাংশকে লিখিত আকারে প্রকাশ করা হলে লব ও হর পরিবর্তিত হয়।

$$\begin{aligned}
 \text{(ଖ)} \quad & \frac{x^2 + 1}{x^2} \times \frac{x + b}{a^2} \\
 &= \frac{x^2 + 1}{x^2} \times \frac{x + b}{a^2} \\
 &= \frac{x^2 + 1}{x^2} \times \frac{x + b}{a^2}
 \end{aligned}$$

∴ ନିର୍ଦ୍ଦେଶ ଉପକଳ

$$\begin{aligned}
 \text{(ଗ)} \quad & \frac{10x^4b^2z^3}{3x^2b^2z^2} \times \frac{15x^4b^2z^3}{2x^4a^2x} \\
 &= \frac{10x^4b^2z^3}{3x^2b^2z^2} \times \frac{15x^4b^2z^3}{2x^4a^2x} \\
 &= \frac{10x^4b^2z^3}{3x^2b^2z^2} \times \frac{15x^4b^2z^3}{2x^4a^2x} \\
 &= \frac{25x^4b^2z^3}{3x^2b^2z^2}
 \end{aligned}$$

∴ ନିର୍ଦ୍ଦେଶ ଉପକଳ =

$$\begin{aligned}
 \text{(ଘ)} \quad & \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} \times \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} \\
 &= \frac{(x^2 + 1)(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^2 + 1)} \\
 &= \frac{(x^2 + 1)(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^2 + 1)}
 \end{aligned}$$

∴ ନିର୍ଦ୍ଦେଶ ଉପକଳ =

$$\begin{aligned}
 \text{(ଙ)} \quad & \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 9x + 20} \times \frac{x^2 + 5}{x^2 + 3} \\
 &= \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 9x + 20} \times \frac{x^2 + 5}{x^2 + 3} \\
 &= \frac{x(x + 2)(x + 3)}{(x + 4)(x + 5)} \times \frac{x^2 + 5}{x^2 + 3} \\
 &= \frac{x(x + 2)(x + 3)}{(x + 4)(x + 5)} \times \frac{x^2 + 5}{x^2 + 3} \\
 &= \frac{x(x + 2)(x + 3)}{(x + 4)(x + 5)} \times \frac{x^2 + 5}{x^2 + 3}
 \end{aligned}$$

∴ ନିର୍ଦ୍ଦେଶ ଉପକଳ

কাজ : কর :

$$১ \quad \frac{7a^2b}{36a^3b^3} \text{ কে } \frac{24ab^2}{35a^4b^5} \text{ দ্বারা} \quad ২ \quad \frac{x^2+3x-4}{x^2-7x+12} \text{ কে } \frac{x^2-9}{x^2-16} \text{ দ্বারা}$$

৫.৭ ভগ্নাংশের ভাগ

একটি ভগ্নাংশকে অপর একটি ভগ্নাংশ দ্বারা ভাগ করার অর্থ প্রথমটিকে দ্বিতীয়টির গুণাত্মক বিপরীত ভগ্নাংশ দ্বারা গুণ করা

উদাহরণস্বরূপ, $\frac{1}{1}$ কে $\frac{2}{1}$ দ্বারা ভাগ করতে হবে,

$$\text{তাহলে } \frac{1}{1} \div \frac{2}{1}$$

$$\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \quad \text{[এখানে } \frac{1}{2} \text{ হলো } \frac{2}{2} \text{ এর গুণাত্মক বিপরীত ভগ্নাংশ]}$$

উদাহরণ ৯ ভাগ কর

$$(ক) \quad \frac{a^3b^2}{c^2d} \text{ কে } \frac{a^2b}{cd} \text{ দ্বারা}$$

$$(খ) \quad \frac{12x^4y^3z^2}{10x^2y^2z} \text{ কে } \frac{6a^3b^2c}{5x^2y^2z} \text{ দ্বারা}$$

$$(গ) \quad \frac{x^2-b}{x^2+ab+b} \text{ কে } \frac{a+b}{a-b} \text{ দ্বারা}$$

$$(ঘ) \quad \frac{1}{x^2-7x+6} \text{ কে } \frac{1}{x^2-36} \text{ দ্বারা}$$

$$(ঙ) \quad \frac{x^2-y^2}{x+y} \text{ কে } \frac{1}{(x+y)^2} \text{ দ্বারা}$$

সমাধান :

$$(ক) \quad ১ম \text{ ভগ্নাংশ } \frac{a^3b^2}{c^2d}$$

$$২য় \text{ " } \frac{a^2b}{cd}$$

$$২য় ভগ্নাংশের গুণাত্মক বিপরীত হলো $\frac{cd^3}{a^2b^3}$$$

ফর্ম-১২, গণিত-অষ্টম শ্রেণি(দাখিল)

$$\frac{a^3b^2}{c^2d^2} = \frac{a^2b^2}{cd^2}$$

$$\frac{a^2b^2}{c^2d^2} \times \frac{cd^2}{a^2b^2}$$

∴ ନିର୍ଦ୍ଦେଶ୍ୟ ଭାଗଫଳ

$$\frac{a^2b^2}{cd^2} \cdot \frac{cd^2}{a^2b^2} = \frac{cd^2}{cd^2}$$

(ଖ)

$$\frac{12a^2x^2y^2z^2}{10x^2y^2z^2} = \frac{6a^2b^2c}{5x^2y^2z^2}$$

$$\frac{12a^2x^2y^2z^2}{10x^2y^2z^2} \times \frac{5x^2y^2z^2}{6a^2b^2c}$$

∴ ନିର୍ଦ୍ଦେଶ୍ୟ ଭାଗଫଳ

$$= \frac{ax}{b^2c}$$

(ଗ)

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + ab + b^2} + \frac{a + b}{a^3 - b^3}$$

$$= \frac{(a+b)(a-b)}{(a^2 + ab + b^2)} \times \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{a + b}$$

$$= (a-b)(a-b)$$

∴ ନିର୍ଦ୍ଦେଶ୍ୟ ଭାଗଫଳ = $(a-b)^2$

(ଘ)

$$\frac{x^2 - 27}{x^2 - 7x + 6} = \frac{x - 9}{x^2 - 36}$$

$$\frac{x^2 - 3}{x^2 - 6x - x + 6} \times \frac{x - 6}{x - 3}$$

$$\frac{(x-3)(x+3x+3)}{(x-6)(x-1)} \times \frac{(x+6)(x-6)}{(x+3)(x-3)}$$

∴ ନିର୍ଦ୍ଦେଶ୍ୟ ଭାଗଫଳ

$$\frac{(x+3x+9)(x+6)}{(x-1)(x+3)}$$

(ଙ)

$$\frac{x^4 - x^2}{x^2 + x} = \frac{x^2 - 1}{(x+1)}$$

$$\frac{(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)}{(x+1)(x^2 - 1)(x+1)} = \frac{(x+x^2)}{(x+1)(x-1)}$$

∴ ନିର୍ଦ୍ଦେଶ୍ୟ ଭାଗଫଳ

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$$

কাজ : ভাগ কর :

১। $\frac{16a^2b^2}{21z^2}$ কে $\frac{28ab^4}{35xyz}$ দ্বারা ২। $\frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$ কে $\frac{x^2 + y^2}{x - y}$ দ্বারা

উদাহরণ ১০। সরল কর .

(ক) $1 + \frac{1}{x} \div 1 - \frac{1}{x}$

(খ) $\left(\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} \right) \div \left(\frac{x}{x-1} - \frac{y}{y+1} \right)$

(গ) $\frac{a^2 + b^2}{(a-b)^2 + 3ab} \div \frac{(a+b)^2 - 3ab}{a^3 - b^3} \times \frac{a+b}{a-b}$

(ঘ) $\frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 - 7x + 12} - \frac{x^2 - 16}{x^2 - 9} \times \frac{(x-4)}{(x-1)}$

(ঙ) $\frac{x+y+3xy(x+y)}{(x+y)^2 - 4xy} \div \frac{(x-y)+4xy}{x^2 - y^2 - 3xy(x-y)}$

সমাধান : (ক) $\left(1 + \frac{1}{x} \right) \div \left(1 - \frac{1}{x} \right)$

$$\begin{aligned} &= \frac{(x+1) + x^2 + 1}{x} \div \frac{(x+1) - x}{x} \\ &= \frac{(x+1) + x^2 + 1}{x} \times \frac{x}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{x^2 + 1}{x-1} \end{aligned}$$

(খ) $\left(\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} \right) \div \left(\frac{x}{x-1} - \frac{y}{y+1} \right)$

$$\begin{aligned} &= \frac{x^2 + y^2 + xy + y^2}{(x+1)(y+1)} \div \frac{x^2 + y^2 - xy + y^2}{(x-1)(y+1)} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2 - xy + y^2} \times \frac{(x-1)(y+1)}{(x+1)(y+1)} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2 - xy + y^2} \times \frac{(x-1)}{(x+1)} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2 - xy + y^2} \times \frac{(x-1)}{(x+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (গ) \quad & \frac{a^3 + b^3}{(a-b)^2 + 3ab} \div \frac{(a+b)^2 - 3ab}{a^3 - b^3} \times \frac{a+b}{a-b} \\
 &= \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{a^2 - 2ab + b^2 + 3ab} \div \frac{(a^3 + 2ab + b^3 - 3ab)}{(a-b)(a^2 + ab + b^2)} \times \frac{a+b}{a-b} \\
 &= \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{(a^2 + ab + b^2)} \div \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{(a^2 - ab + b^2)} \times \frac{a+b}{a-b} \\
 &= (a+b)(a+b) \\
 &= (a+b)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (ঘ) \quad & \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 7x + 12} \div \frac{x^2 - 16}{x^2 - 9} \times \frac{(x-4)^2}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{(x+4)(x-4)}{(x-3)(x-4)+12} \times \frac{x^2-3}{x^2-4} \times \frac{(x-4)}{(x-1)} \\
 &= \frac{(x+4)(x-1)}{(x-3)(x-4)} \times \frac{(x-3)(x-3)}{(x+4)(x-4)} \times \frac{(x-4)}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{x+3}{x-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (ঙ) \quad & \frac{x^2 + y^2 + 3xy}{(x+y)^2 - 4xy} \div \frac{(x-y)^2 + 4xy}{x^2 - y^2 - 3xy} \\
 &= \frac{(x+y)^3}{(x-y)^2} \div \frac{(x-y)^3}{(x+y)^2} \\
 &= \frac{(x+y)^3}{(x-y)^2} \times \frac{(x+y)^2}{(x-y)^3} \\
 &= \frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2} \\
 &= \frac{x+y}{x-y}
 \end{aligned}$$

অনুশীলনী ৫.২

১. $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{p}{q}$ কে সাধারণ হরবিশিষ্ট করলে নিচের কোনটি সঠিক?

$$\text{ক) } \frac{avzq}{xyzq}, \frac{bxzq}{xyzq}, \frac{cxvq}{xyzq}, \frac{pxyz}{xyzq} \quad \text{খ) } \frac{axy}{xyzq}, \frac{byz}{xyzq}, \frac{cxz}{xyzq}, \frac{pxy}{xyzq}$$

৭) $\frac{a}{xyzq}, \frac{b}{xyzq}, \frac{c}{xyzq}, \frac{p}{xyzq}$ খ) $\frac{axyzq}{xyzq}, \frac{bxyzq}{xyzq}, \frac{cxyzq}{xyzq}, \frac{pxyzq}{xyzq}$

৮) $\frac{x^2y^2}{ab}$ ও $\frac{c^3d^2}{e^3f}$ এর গুণফল কত হবে?

ক) $\frac{x^2y^2c^3d^2}{abx^3y^2}$ খ) $\frac{c^3d^2}{abx^3y}$ গ) $\frac{c^2y^2c^3}{x^3y}$ ঘ) $\frac{c^3d^2}{ab}$

৯) $\frac{x^2-2x+1}{x-1}$ কে $\frac{x-1}{x-1}$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল কত হবে?

ক) $\frac{x+1}{x-1}$ খ) $\frac{x-1}{x-1}$ গ) $\frac{x-1}{x-1}$ ঘ) $\frac{x-1}{x-1}$

১০) $\frac{a-b}{a} - \frac{a+b}{b}$ এর সরল মান নিচের কোনটি?

ক) $\frac{a^2-2ab-b^2}{ab}$ খ) $\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$ গ) $\frac{-a^2-b^2}{ab}$ ঘ) $\frac{a^2-b^2}{ab}$

১১) $\frac{p+x}{p-x} + \frac{(p+x)^2}{p^2-x^2}$ এর মান কোনটি?

ক) ১ খ) $p-x$ গ) $p+x$ ঘ) $\frac{p-x}{p+x}$

১২) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ ও $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ কে সাধারণ হর বিশিষ্ট ভগ্নাংশে প্রকাশ করলে নিচের কোনটি হবে?

ক) $\frac{(x+1)^2(x-1)^2}{(x^2+1)^2(x^2-1)^2}$ খ) $\frac{(x-1)^2(x+1)^2}{(x^2+1)^2(x^2-1)^2}$ গ) $\frac{(x+1)^2(x-1)^2}{x^2+y^2, x^2+y^2}$ ঘ) $\frac{(x+1)^2(x-1)^2}{(x^2+1)^2(x^2-1)^2}$

◆ নিচের উদ্দীপকের আলোকে ৭-৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\frac{x^2+4x-21}{x^2+5x-14}$ একটি বীজগাণিতিক ভগ্নাংশ।

৭। লবের উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট রূপ কোনটি?

ক) $(x+7)(x-3)$ খ) $(x-1)(x+21)$ গ) $(x-3)(x-7)$ ঘ) $(x+3)(x-7)$

৮। ভগ্নাংশটির লঘিষ্ঠ মান নিচের কোনটি?

ক) $\frac{x+7}{x+7}$ খ) $\frac{x-3}{x+2}$ গ) $\frac{x+7}{x-2}$ ঘ) $\frac{x-3}{x-2}$

৯। লঘিষ্ঠ মানের সাথে কত যোগ করলে যোগফল $\frac{1}{2}$ হবে?

ক) ১ খ) ১ গ) $x-2$ ঘ) $x-3$

১০ $\frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 10x + 25}$ এর সমতুল ভগ্নাংশ হবে-

i $\frac{x+1}{x+5}$

ii $\frac{x-2}{x+2}$

iii $\frac{x+3}{x+10}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii

খ) i ও iii

গ) ii ও iii

ঘ) i, ii ও iii

১১ $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1}$ ও $\frac{x^2 - x + 6}{x^2 + 4}$ এর ভাগফল নিচের কোনটি?

ক) $\frac{x+3}{2}$

খ) $\frac{x+1}{x+3}$

গ) 1

ঘ) 0

১২ $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} - \frac{4}{x^2-4}$ এর সরল মান নিচের কোনটি?

ক) $\frac{x}{x-4}$

খ) $\frac{2x}{x-4}$

গ) 1

ঘ) 0

১৩ গুন কর

(ক) $\frac{9x^2y}{7x^2z^2} \cdot \frac{5b^2c^2}{3c^2x^2}$ এবং $\frac{7c^2a^2}{x^2y^2}$

(খ) $\frac{16a^2b^2}{21z^2} \cdot \frac{28z^4}{9x^3y^4}$ এবং $\frac{3y^3z}{10x}$

(গ) $\frac{x^2}{x^2-1}$ এবং $\frac{11}{x^2}$

(ঘ) $\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{(x-1)^2}{(x+1)}$ এবং $\frac{x^2}{x^2-4x+5}$

(ঙ) $\frac{x^4}{(x^2-2x+1)^2} \cdot \frac{x^2}{(x+1)^2}$ এবং $\frac{x^2+1}{x^2+1}$

(চ) $\frac{1-b^2}{1+x} \cdot \frac{1-x^2}{b+b^2}$ এবং $\left(1 + \frac{1-x}{x}\right)$

(ছ) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} \cdot \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}$ এবং $\frac{x^2-16}{x^2-9}$

(জ) $\frac{x^3+y^3}{a^2b+ab^2+b^3} \cdot \frac{a^2-b^3}{x^2-xy+y^2}$ এবং $\frac{ab}{x+y}$

(ঝ) $\frac{x^2+y^2+3xy(x+y)}{(a+b)^3} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ এবং $\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}$

১৪ ভাগ কর : (১ম রাশিকে ২য় রাশি দ্বারা)

(ক) $\frac{3x^2-4y^2}{2a-15x}$

(খ) $\frac{9a^2b^2-16a^3b}{4c^2-3c^3}$

(গ) $\frac{21a^4b^4c^4-7a^2b^2c^2}{4x^2y^2-12xy}$

$$\begin{aligned} \text{(ସ)} \quad \frac{x}{y}, \frac{x+y}{y} & \quad \text{(ଃ)} \quad \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} \div \frac{a^2-b^2}{a+b} & \quad \text{(ଢ)} \quad \frac{x^4-1}{x^2+1} \div \frac{x^2+1}{x^2-1} \\ \text{(ଢ)} \quad \frac{a^3+b^3}{a-b} \div \frac{a^3-ab+b^3}{a-b} & \quad \text{(ଢ଼)} \quad \frac{x^2-7x+12}{x^2-4} \div \frac{x^2-16}{x^2-3x+2} \\ \text{(ଢ଼)} \quad \frac{x^2}{x^2-36} \div \frac{x^2+13x+40}{x^2+x-56} \end{aligned}$$

୧୧. ସରଳ କର ।

$$\begin{aligned} \text{(କ)} \quad & \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) \\ \text{(ଖ)} \quad & \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1-x} \right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \\ \text{(ଗ)} \quad & \left(1 - \frac{a}{a+b} - \frac{a}{a+b+c} - \frac{a}{a+b+c} \right) \\ \text{(ଘ)} \quad & \left(\frac{1}{1+a} + \frac{a}{1-a} \right) \left(\frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+a+a^2} \right) \\ \text{(ଙ)} \quad & \left(\frac{x}{2x-y} + \frac{x}{2x+y} \right) \left(4 - \frac{3x^2}{x^2-y^2} \right) \\ \text{(ଚ)} \quad & \left(\frac{2x+y}{x+y} - 1 \right) + \left(1 - \frac{y}{x+y} \right) \\ \text{(ଛ)} \quad & \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} \right) + \left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} \right) \\ \text{(ଜ)} \quad & \left(\frac{a^2+b^2}{2ab} - 1 \right) \left(\frac{a}{a} - \frac{b}{b} - 3ab \right) \\ \text{(ଝ)} \quad & \frac{(x+y)^2-4xy}{(a+b)^2-4ab} \div \frac{x^2-y^2}{a-b} = \frac{3ab(a-b)}{3ab(a-b)} \\ \text{(ଞ)} \quad & \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 \right) \div \left(\frac{a^2}{b} + \frac{a}{b} + 1 \right) \end{aligned}$$

୧୨. ସରଳ କର ।

$$\begin{aligned} \text{(କ)} \quad & \frac{x^2+2x-15}{x^2+x-12} \div \frac{x^2-25}{x^2-x-20} \times \frac{x-2}{x^2-5x+6} \\ \text{(ଖ)} \quad & \left(\frac{x}{x-y} - \frac{x}{x+y} \right) + \left(\frac{y}{x-y} - \frac{y}{x+y} \right) + \left(\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} \right) \div \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right) \end{aligned}$$

(গ) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2} \div \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

(ঘ) $\frac{a^4 - b^4}{a^2 + b^2} \times \frac{(a+b)^2 - 4ab}{a^3 - b^3} \div \frac{a+b}{a^2 + ab + b^2}$

১৭। $\frac{a^4 - b^4}{a^2 - 2ab + b^2} \div \frac{a-b}{a^3 + b^3} \div \frac{a+b}{a^3 + b^3}$ তিনটি বীজগণিতিক রাশি।

ক) ১ম রাশিকে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ কর।

খ) দেখাও যে, রাশি তিনটির গুণফল $\frac{a^4 - b^4}{(a - ab + b)}$

গ) ১ম রাশিকে $\frac{a^4 - b^4}{(a+b)^2 - 4ab}$ দ্বারা ভাগ করে ভাগফলের সাথে $\frac{a}{a+b}$ যোগ কর।

১৮। $A = x^2 - 5x + 6$, $B = x^2 - 7x + 12$, $C = x^2 - 9x + 20$ তিনটি বীজগণিতিক রাশি

ক) $\frac{x}{y}$ এবং $\frac{x+y}{y}$ এর বিয়োগফল নির্ণয় কর।

খ) $\frac{1}{B} + \frac{1}{C}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ কর।

গ) $\frac{1}{A} - \frac{1}{B} - \frac{1}{C}$ কে সাধারণ হর বিশিষ্ট ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

১৯। $A = x - 2$, $B = x^2 + 2x + 4$, $C = x^2 - 8$ তিনটি বীজগণিতিক রাশি

ক) যোগফল নির্ণয় কর: $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} + \frac{a-b}{ac}$

খ) সরল কর, $\frac{1}{A} \times \frac{x^2 + 6}{B} + \frac{1}{C}$

গ) প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{A} \times \frac{x+2}{B} + \frac{x+2}{C} = 1$

২০। $A = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 7x + 12}$, $B = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 6x + 7}$, $C = \frac{x^2 + 12x + 35}{x^2 + 4x + 5}$ তিনটি বীজগণিতিক রাশি

ক) A কে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ কর।

খ) $A+B$ কে সরল কর।

গ) দেখাও যে, $B \times C = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 3}$

ষষ্ঠ অধ্যায় সরল সহসমীকরণ

এই অধ্যায়ের শুরুরাজ্যের পূর্বজ্ঞান বইয়ের শেষে পরিচিষ্ট অংশ সংগ্রহ আছে। এখানে পরিচিষ্ট অংশ পাঠ্য গ্রন্থে চলে গেলে গাণিতিক সমস্যা সমাধানে সমীকরণের ভূমিকা গুরুত্বপূর্ণ। আমরা ষষ্ঠ ও সপ্তম শ্রেণিতে এক চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণ ও এ সংক্রান্ত বাস্তব সমস্যার সমীকরণ গঠন করে তা সমাধান করতে শিখি। সপ্তম শ্রেণিতে সমীকরণের পঞ্চাঙ্গুর বিধি, বর্জন বিধি, আড়ম্বরণ বিধি ও প্রতিসম্য বিধি সম্পর্কে জেনেছি। এ ছাড়াও লেখচিত্রের সাহায্যে কীভাবে সমীকরণের সমাধান করতে হয় তা জেনেছি। এ অধ্যায়ে দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের বিভিন্ন পদ্ধতিতে সমাধান ও লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা—

- সমীকরণের প্রতিস্থাপন পদ্ধতি ও অপনয়ন পদ্ধতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সমাধান করতে পারবে।
- গাণিতিক সমস্যার সরল সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান করতে পারবে।
- সরল সহসমীকরণের সমাধান লেখচিত্রে দেখাতে পারবে।
- লেখচিত্রের সাহায্যে সরল সহসমীকরণের সমাধান করতে পারবে।

৬.১ সরল সহসমীকরণ

$x + y = 5$ একটি সমীকরণ। এখানে x ও y দুইটি অজানা রাশি বা চলক। এই চলক দুইটি একত্বাবিশিষ্ট। একত্ব সমীকরণ সরল সমীকরণ।

এখানে, যে সংখ্যাখন্ডের যোগফল ৫ সেই সংখ্যা দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হবে যেমন, $x = 4$, $y = 1$ বা $x = 3$, $y = 2$ বা $x = 2$, $y = 3$ বা $x = 1$, $y = 4$, ইত্যাদি, একত্ব অসংখ্য সংখ্যাযুগল দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হবে।

আবার, $x = 1$, $y = 3$ এই সমীকরণটি বিবেচনা করলে দেখতে পাই, সমীকরণটি $x = 4$, $y = 1$ বা $x = 5$, $y = 2$ বা $x = 6$, $y = 3$ বা $x = 7$, $y = 4$ বা $x = 8$, $y = 5$ বা $x = 2$, $y = 1$ বা $x = 1$, $y = 2$, $x = 0$, $y = 5$, ইত্যাদি অসংখ্য সংখ্যাযুগল দ্বারা সিদ্ধ হয়।

এখানে, $x + y = 5$ এবং $x - y = 3$ সমীকরণ দুইটি একত্রে বিবেচনা করলে উভয় সমীকরণ হতে প্রাপ্ত সংখ্যাযুগলের মধ্যে $x = 4$, $y = 1$ দ্বারা উভয় সমীকরণ যুগপৎ সিদ্ধ হয়।

চলকের মান দ্বারা একাধিক সমীকরণ সিদ্ধ হলে সমীকরণসমূহকে একত্রে সহসমীকরণ বলা হয় এবং চলক একত্বাবিশিষ্ট হলে সহসমীকরণকে সরল সহসমীকরণ বলে।

কর্মী ১৩, গণিত অষ্টম শ্রেণি (দারিদ্র্য)

চলকদ্বয়ের যে মান দ্বারা সহসমীকরণ যুগপৎ সিদ্ধ হয়, এদেরকে সহসমীকরণের মূল বা সমাধান বলা হয়।
এখানে $x + y = 5$ এবং $x - y = 3$ সমীকরণ দুইটি সহসমীকরণ। এদের একমাত্র সমাধান
 $x = 4, y = 1$ যা $(x, y) = (4, 1)$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

৬.২ দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সমাধান

দুই চলকবিশিষ্ট দুইটি সরল সমীকরণের সমাধানের পদ্ধতিগুলোর মধ্যে নিচের পদ্ধতি দুইটি আলোচনা করা হলো :

(১) প্রতিস্থাপন পদ্ধতি (Method of Substitution)

(২) অপনয়ন পদ্ধতি (Method of Elimination)

(১) প্রতিস্থাপন পদ্ধতি

এই পদ্ধতিতে আমরা নিচের ধাপগুলো অনুসরণ করে সমাধান করতে পারি

(ক) যেকোনো সমীকরণ থেকে চলক দুইটির একটির মান অপরের মাধ্যমে প্রকাশ করা

(খ) অপর সমীকরণে প্রাপ্ত চলকের মানটি স্থাপন করে এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ সমাধান করা

(গ) নির্ণীত সমাধান প্রদত্ত সমীকরণ দুইটির যেকোনো একটিতে বসিয়ে অপর চলকের মান নির্ণয় করা

উদাহরণ ১। সমাধান কর :

$$x + y = 7$$

$$x - y = 3$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ

$$x + y = 7 \quad (1)$$

$$x - y = 3 \quad (2)$$

সমীকরণ (2) হতে পক্ষান্তর করে পাই,

$$x = y + 3 \quad (3)$$

সমীকরণ (3) হতে x এর মানটি সমীকরণ (1) -এ বসিয়ে পাই,

$$y + 3 + y = 7$$

$$\text{বা, } 2y = 7 - 3$$

$$\text{বা, } 2y = 4$$

$$y = 2$$

এখন সমীকরণ (3) এ $y = 2$ বসিয়ে পাই,

$$x = 2 + 3$$

$$x = 5$$

নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (5, 2)$

[তদ্বি পরীক্ষা : সমীকরণ দুইটিতে $x=5$ ও $y=2$ বসালে সমীকরণ (1)-এর বামপক্ষ $= 5+2=7$
 $=$ ডানপক্ষ এবং সমীকরণ (2)-এর বামপক্ষ $= 5-2=3 =$ ডানপক্ষ।]

উদাহরণ ২। সমাধান কর।

$$x + 2y = 9$$

$$2x - y = 3$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ

$$x + 2y = 9 \quad (1)$$

$$2x - y = 3 \quad (2)$$

সমীকরণ (2) হতে পাই, $y = 2x - 3 \dots\dots\dots (3)$

সমীকরণ (1) এ y এর মান বসিয়ে পাই, $x + 2(2x - 3) = 9$

$$\text{বা, } x + 4x - 6 = 9$$

$$\text{বা, } 5x = 6 + 9$$

$$\text{বা, } 5x = 15$$

$$\text{বা } x = \frac{15}{5}$$

$$x = 3$$

এখন x এর মান সমীকরণ (3) -এ বসিয়ে পাই,

$$y = 2 \times 3 - 3$$

$$y = 3$$

$$3$$

নির্ণয় সমাধান $(x, y) = (3, 3)$

উদাহরণ ৩। সমাধান কর :

$$2x + 5y = 16$$

$$y - 2x = -1$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ

$$2x + 5y = 16 \quad (1)$$

$$y - 2x = -1 \quad (2)$$

সমীকরণ (2) হতে পাই, $y = 2x - 1 \quad (3)$

সমীকরণ (1) এ y এর মান বসিয়ে পাই,

$$2(2x - 1) + 5z = 16$$

$$\text{বা, } 4x - 2 + 5z = 16$$

$$\text{বা, } 9z = 16 - 2$$

$$\text{বা, } 9z = 18$$

$$\text{বা, } z = \frac{18}{9}$$

$$\therefore z = 2$$

এখন z এর মান সমীকরণ (3) এ বসিয়ে পাই,

$$x - 2 \times 2 = 1$$

$$4 - 1$$

$$x = 3$$

নির্ণেয় সমাধান $(x, y, z) = (3, 2)$

উদাহরণ ৪। সমাধান কর

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

$$\frac{4}{x} + \frac{9}{y} = -1$$

সমাধান :

প্রদত্ত সমীকরণ

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{4}{x} + \frac{9}{y} = -1 \quad (2)$$

$\frac{1}{x} = u$ এবং $\frac{1}{y} = v$, ধরে (1) ও (2) নং

সমীকরণ হতে পাই

$$2u + v = 1 \quad (3)$$

$$4u + 9v = -1 \quad (4)$$

(3) নং সমীকরণ হতে পাই

$$v = 1 - 2u \quad (5)$$

(4) নং সমীকরণে v এর মান বসিয়ে পাই,

$$4u + 9(1 - 2u) = -1$$

$$\text{বা, } 4u - 9 + 18u = -1$$

$$\text{বা, } 22u - 9 = -1$$

$$u = \frac{8}{22} - \frac{4}{11}$$

$$\text{বা, } x = \frac{4}{11}$$

$$x = \frac{11}{4}$$

এখন, u এর মান (১) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$x - 1 = 2 \times \frac{4}{11} - \frac{11}{4}$$

$$x = \frac{3}{11}$$

$$\text{বা } \frac{1}{x} = \frac{3}{11}$$

$$x = \frac{11}{3}$$

নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = \left(\frac{11}{4}, \frac{11}{3}\right)$

(২) অপনয়ন পদ্ধতি

এই পদ্ধতিতে নিচের ধাপগুলো অনুসরণ করে সমাধান করা যায় :

- প্রদত্ত উভয় সমীকরণকে এমন দুইটি সংখ্যা বা রাশি দ্বারা পৃথকভাবে গুণ করতে হবে যেন যেকোনো একটি চলকের সহগের সাংখ্যিক মান সমান হয়।
- একটি চলকের সহগ একই চিহ্ন বিশিষ্ট হলে সমীকরণ পরস্পর বিয়োগ, অন্যথায় যোগ করতে হবে নিয়োগফলকৃত (বা যোগফলকৃত) সমীকরণটি একটি এক চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণ হবে।
- সরল সমীকরণ সমাধানের নিয়মে চলকটির মান নির্ণয় করা।
- প্রাপ্ত চলকের মান প্রদত্ত যেকোনো একটি সমীকরণে বসিয়ে অপর চলকের মান নির্ণয় করা।

উদাহরণ ৫ : সমাধান কর :

$$5x - 4y = 6$$

$$(x + 2y) = 4$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ

$$5x - 4y = 6 \quad (1)$$

$$x + 2y = 4 \quad (2)$$

এখানে সমীকরণ (১) কে ১ দ্বারা এবং সমীকরণ (২) কে ২ দ্বারা গুণ করে পাই

$$5x - 4y = 6 \quad (১)$$

$$2x + 4y = 8 \quad (২)$$

(3) ও (4) সমীকরণ যোগ করে পাই,

$$7x = 14$$

$$\text{বা, } x = \frac{14}{7} \quad (4)$$

$$x = 2$$

সমীকরণ (2) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$$2 + 2x = 4$$

$$\text{বা, } 2x = 4 - 2$$

$$\text{বা, } x = \frac{2}{2}$$

$$x = 1$$

নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, 1)$

উদাহরণ ৬। সমাধান কর

$$x + 4y = 14$$

$$7x - 3y = 5$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ

$$x + 4y = 14 \quad (1)$$

$$7x - 3y = 5 \quad (2)$$

সমীকরণ (1) কে 3 দ্বারা এবং সমীকরণ (2) কে 4 দ্বারা গুণ করে পাই,

$$3x + 12y = 42 \quad (3)$$

$$28x - 12y = 20 \quad (4)$$

$$31x = 62 \quad [\text{যোগ করে}]$$

$$\text{বা, } x = \frac{62}{31}$$

$$x = 2$$

এখন x এর মান সমীকরণ (1) -এ বসিয়ে পাই,

$$2 + 4y = 14$$

$$\text{বা, } 4y = 14 - 2$$

$$\text{বা, } 4y = 12$$

$$\text{বা, } y = \frac{12}{4}$$

$$y = 3$$

$$(x, y) = (2, 3)$$

উদাহরণ ৭। সমাধান কর :

$$5x - 3x = 9$$

$$2x = 5x - 1$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ

$$5x - 3x = 9 \quad (1)$$

$$2x = 5x - 1 \quad (2)$$

সমীকরণ (1) কে ৫ দ্বারা এবং সমীকরণ (2) কে ২ দ্বারা গুণ করে পাই

$$25x - 15x = 45 \quad (3)$$

$$9x - 15x = 3 \quad (4)$$

$$(-) \quad (+) \quad (+)$$

$$16x = 48 \quad | \text{বিয়োজ করে} |$$

$$\text{বা, } x = \frac{48}{16}$$

$$x = 3$$

সমীকরণ (1) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$$5 \times 3 - 3y = 9$$

$$\text{বা, } 15 - 3y = 9$$

$$\text{বা, } -3y = 9 - 15$$

$$\text{বা, } -3y = -6$$

$$\text{বা, } y = \frac{6}{3}$$

$$y = 2$$

$$(x, y) = (3, 2)$$

উদাহরণ ৮।

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 3$$

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 2$$

সমাধান:

প্রদত্ত সমীকরণ

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 3 \quad (1)$$

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 2 \quad (2)$$

(১) সমীকরণকে (২) দ্বারা গুণ করে (২) নং সমীকরণ এর সাথে যোগ করে পাই,

$$\frac{2x}{5} + \frac{6}{1} = 6 \quad (3)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{6}{1} = 2 \quad (4)$$

$$\frac{2x}{5} + \frac{1}{2} = 8$$

$$\text{বা, } \frac{4x + 5}{10} = 8$$

$$\text{বা, } 9x = 8 \times 10$$

$$\text{বা, } x = \frac{80}{9}$$

(১) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই

$$\frac{1}{5} \times \frac{80}{9} + \frac{3}{1} = 3$$

$$\text{বা, } \frac{16}{9} + \frac{3}{1} = 3$$

$$\text{বা, } \frac{3}{1} = 3 - \frac{16}{9}$$

$$\text{বা, } \frac{3}{1} = \frac{11}{9}$$

$$\text{বা, } \frac{3}{1} = \frac{11}{9}$$

$$\text{বা, } y = \frac{27}{11}$$

নির্ণয় সমাধান $(x, y) = \left(\frac{80}{9}, \frac{27}{11}\right)$

অনুশীলনী ৬.১

(ক) প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান কর (১-১২) :

$$১। \begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$২। \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$৩। \begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$৪। \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \end{cases}$$

$$৫। \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 17x - 7y = 13 \end{cases}$$

$$৬। \begin{cases} x - y = 2a \\ ax + by = a + b \end{cases}$$

$$৭। \begin{cases} ax + by = ab \\ bx + ay = ab \end{cases}$$

$$৮। \begin{cases} ax - by = ab \\ bx - ay = ab \end{cases}$$

$$৯। \begin{cases} ax - by = a - b \\ ax + by = a + b \end{cases}$$

$$১০। \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 6 \end{cases}$$

$$১১। \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2 \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1 \end{cases}$$

$$১২। \begin{cases} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{a}{2} + \frac{b}{3} \\ \frac{a}{x} - \frac{b}{y} = \frac{a}{2} - \frac{b}{3} \end{cases}$$

(খ) অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান কর (১৩-২৬) :

$$১৩। \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$১৪। \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 6x - 7y = 5 \end{cases}$$

$$১৫। \begin{cases} 4x + 3y = 15 \\ 5x + 4y = 19 \end{cases}$$

$$১৬। \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

$$১৭। \begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$১৮। \begin{cases} 3x - 5y = 9 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$১৯। \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 3 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$$

$$২০। \begin{cases} x + ay = b \\ ax - by = c \end{cases}$$

$$২১। \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 3 \end{cases}$$

$$২২। \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 3 \end{cases}$$

$$২৩। \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2 \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1 \end{cases}$$

$$২৪। \begin{cases} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{a}{2} + \frac{b}{3} \\ \frac{a}{x} - \frac{b}{y} = \frac{a}{2} - \frac{b}{3} \end{cases}$$

$$২৫। \begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 2 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$$

$$২৬। \begin{cases} x + y = a + b \\ ax - by = a + b \end{cases}$$

৬.৩ বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সহসমীকরণ গঠন ও সমাধান

সরল সহসমীকরণের ধারণা থেকে বাস্তব জীবনের বহু সমস্যা সমাধান করা যায়। অনেক সমস্যায় একাধিক চলক থাকে, প্রত্যেক চলকের জন্য অলাদা প্রতীক ব্যবহার করে সমীকরণ গঠন করা যায়। এক্ষেপে ক্ষেত্রে যথোপযোজ্য প্রতীক ব্যবহার করা হয়, ততগুলো সমীকরণ গঠন করতে হয়। অতঃপর সমীকরণগুলো সমাধান করে চলকের মান নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ ১ দুইটি সংখ্যার যোগফল ৬০ এবং বিয়োগফল ২০ হলে সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সংখ্যা দুইটি x ও y , যেখানে $x > y$

১ম শর্তানুসারে, $x + y = 60$ (১)

২য় শর্তানুসারে, $x - y = 20$ (২)

সমীকরণ (১) ও (২) যোগ করে পাই,

$$\begin{aligned} 2x &= 80 \\ \text{বা, } x &= \frac{80}{2} = 40 \end{aligned}$$

আবার, সমীকরণ (১) হতে সমীকরণ (২) বিয়োগ করে পাই,

$$\begin{aligned} 2y &= 40 \\ y &= \frac{40}{2} = 20 \end{aligned}$$

নির্ণয় সংখ্যা দুইটি ৪০ ও ২০।

উদাহরণ ২ ফাইয়াজ ও আয়াজের কতকগুলো আপেলকুল ছিল। ফাইয়াজের আপেলকুল থেকে আয়াজকে

(১)টি আপেলকুল দিলে আয়াজের আপেলকুলের সংখ্যা ফাইয়াজের আপেলকুলের সংখ্যার তিনগুন হতো।

আর আয়াজের আপেলকুল থেকে ফাইয়াজকে ২০টি দিলে ফাইয়াজের আপেলকুলের সংখ্যা আয়াজের সংখ্যার দ্বিগুন হতো। কার কতগুলো আপেলকুল ছিল ?

সমাধান : মনে করি, ফাইয়াজের আপেলকুলের সংখ্যা x

এবং আয়াজের আপেলকুলের সংখ্যা y

১ম শর্তানুসারে, $y + 10 = 3(x - 10)$

$$\text{বা, } y + 10 = 3x - 30$$

$$\text{বা, } 3x - y = 10 + 30$$

$$\text{বা, } 3x - y = 40 \quad (১)$$

২য় শর্তানুসারে, $x + 20 = 2(y - 20)$

$$\text{বা, } x + 20 = 2y - 40$$

$$\text{বা, } x - 2y = -40 - 20$$

$$\text{বা, } x - 2y = -60 \quad (2)$$

সমীকরণ (1) কে 2 দ্বারা গুণ করে তা থেকে সমীকরণ (2) বিয়োগ করে পাই,

$$5x = 140$$

$$x = \frac{140}{5} = 28$$

x এর মান সমীকরণ (1) এ বসিয়ে পাই,

$$3 \times 28 - y = 40$$

$$\text{বা, } y = 40 - 84$$

$$\text{বা, } y = -44$$

$$y = -44$$

ফাইয়াজের আপেলগুলোর সংখ্যা 28টি

আর্যাজের আপেলগুলোর সংখ্যা 44টি

উদাহরণ ৩ 10 বছর পূর্বে পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত ছিল 4 : 1। 10 বছর পরে পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত হবে 2 : 1। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বর্তমানে পিতার বয়স x বছর

এবং পুত্রের বয়স y বছর

১ম শর্তানুসারে, $(x - 10) : (y - 10) = 4 : 1$

$$\text{বা, } \frac{x - 10}{y - 10} = \frac{4}{1}$$

$$\text{বা, } x - 10 = 4y - 40$$

$$\text{বা, } x - 4y = -40 + 10$$

$$x - 4y = -30 \quad (1)$$

২য় শর্তানুসারে, $(x + 10) : (y + 10) = 2 : 1$

$$\text{বা, } \frac{x + 10}{y + 10} = \frac{2}{1}$$

$$\text{বা, } x + 10 = 2y + 20$$

$$\text{বা, } x - 2y = 20 - 10$$

$$x - 2y = 10 \quad (2)$$

সমীকরণ (1) ও (2) হতে পাই,

$$x + 4y = 30$$

$$x + 2y = 10$$

+

$$2y = 40 \quad [\text{বিয়োগ করে।}]$$

$$y = \frac{40}{2} = 20$$

y এর মান সমীকরণ (2) এ বসিয়ে পাই,

$$x + 2 \times 20 = 10$$

$$x + 40 = 10$$

$$x = 10 - 40$$

$$x = -30$$

∴ বর্তমানে পিতার বয়স 50 বছর এবং পুত্রের বয়স 20 বছর।

উদাহরণ ৪। দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সঙ্গে 7 যোগ করলে যোগফল দশক স্থানীয় অঙ্কটির তিনগুণ হয়। কিন্তু সংখ্যাটি থেকে 18 বাদ দিলে অঙ্কদ্বয় স্থান পরিবর্তন করে সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
সমাধান : মনে করি, দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যাটির একক স্থানীয় অঙ্ক x এবং দশক স্থানীয় অঙ্ক y ।

$$\text{সংখ্যাটি} = x + 10y$$

১ম শর্তানুসারে, $x + y + 7 = 3y$

$$\text{বা, } x + y - 3y = -7$$

$$\text{বা, } x - 2y = -7 \quad (1)$$

২য় শর্তানুসারে, $x + 10y - 18 = y + 10x$

$$\text{বা, } x + 10y - y - 10x = 18$$

$$\text{বা, } 9y - 9x = 18$$

$$\text{বা, } 9(y - x) = 18$$

$$\text{বা, } y - x = \frac{18}{9} = 2$$

$$\text{বা, } y - x = 2 \quad (2)$$

(1) ও (2) নং যোগ করে পাই, $x = 5$

$$x = 5$$

y -এর মান (1) নং-এ বসিয়ে পাই,

$$x - 2y = -7$$

$$\therefore 5 - 2y = -7$$

নির্ণেয় সংখ্যাটি $= 3 + 10 \times 5 = 3 + 50 = 53$

উদাহরণ ৫, কোনো ভগ্নাংশের লবের সাথে ৭ যোগ করলে ভগ্নাংশটির মান ২ হয় এবং হর থেকে ২ বাদ দিলে ভগ্নাংশটির মান ১ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y}$, $y \neq 0$

১ম শর্তানুসারে, $\frac{x+7}{y} = 2$

$$\text{বা, } x+7 = 2y$$

$$\text{বা, } x - 2y = -7 \quad (1)$$

২য় শর্তানুসারে, $\frac{x}{y-2} = 1$

$$\text{বা, } x = y - 2$$

$$\text{বা, } x - y = -2 \quad (2)$$

সমীকরণ (1) ও (2) হতে পাই,

$$x - 2y = -7$$

$$x - y = -2$$

$$\begin{array}{r} + \quad + \\ \hline \end{array}$$

$$y = -5 \quad | \text{ বিয়োগ করে } |$$

$$y = -5$$

আবার, $y = -5$ সমীকরণ (2) এ বসিয়ে পাই,

$$x - 5 = -2$$

$$x - 5 + 5 = -2 + 5$$

নির্ণেয় ভগ্নাংশ $\frac{3}{-5}$

৬.৪ লেখচিত্রের সাহায্যে সরল সহসমীকরণের সমাধান

দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণে দুইটি সরল সমীকরণ থাকে। দুইটি সরল সমীকরণের জন্য লেখ অঙ্কন করলে দুইটি সরলরেখা পাওয়া যায়। এদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক উভয় সরলরেখায় অবস্থিত। এই ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক অর্থাৎ (x, y) প্রদত্ত সরল সহসমীকরণের মূল হবে। x ও y -এর প্রাপ্ত মান দ্বারা সমীকরণ দুইটি যুগপৎ সিদ্ধ হবে। অতএব সরল সহসমীকরণ যুগলের একমাত্র সমাধান, যা ছেদবিন্দুটির ভূজ ও কোটি।
মন্তব্য : সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হলে, প্রদত্ত সহসমীকরণের কোনো সমাধান নেই।

উদাহরণ ৬। লেখের সাহায্যে সমাধান কর।

$$x + y = 7 \quad (i)$$

$$x - y = 1 \quad (ii)$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ (i) হতে পাই,

$$x = 7 - y \quad (iii)$$

এর বিভিন্ন মানের জন্য y এর মান বের করে নিচের ছকটি তৈরি করি

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	9	8	7	6	5	4	3

ছক-১

আবার, সমীকরণ (ii) হতে পাই,

$$x = y + 1 \quad (iv)$$

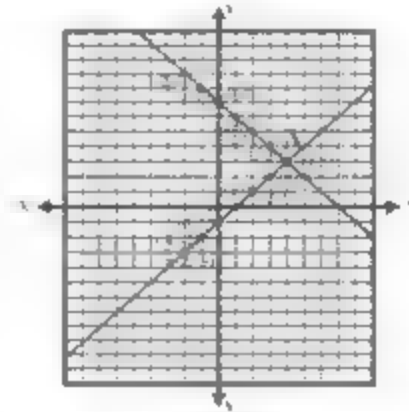
এর বিভিন্ন মানের জন্য y এর মান বের করে নিচের ছকটি তৈরি করি

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

ছক-২

মনে করি, $\{(i)\}$ ও $\{(ii)\}$ যথাক্রমে ১-অক্ষ ও ১-অক্ষ এবং (i) মূলবিন্দু

উভয় অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতিদ্বন্দ্বিতা দৈর্ঘ্যকে একক ধরি ছক-১ এ (2, 9), (1, 8), (0, 7), (1, 6), (2, 5), (3, 4) ও (4, 3) বিন্দুগুলোকে ছক কাগজে স্থাপন করি। এই বিন্দুগুলো যোগ করে উভয় দিকে বসিত করে সমীকরণ (i) দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখাটির লেখ পাই।



লেখচিত্র

আবার ছক-২ এ (2, -3), (1, -2), (0, -1), (1, 0), (2, 1), (3, 2) ও (4, 3) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। এই বিন্দুগুলো যোগ করে (ii)-এর সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখাটির লেখ পাই। এই সরলরেখাটি পূর্বের সরলরেখাকে ১ বিন্দুতে ছেদ করে। ১ বিন্দু উভয় সরলরেখার সাধারণ বিন্দু। এর স্থানাঙ্ক উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করে লেখ থেকে দেখা যায়, ১ বিন্দুর ভূজ ৪ এবং কোটি ৩। নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (4, 3)$

উদাহরণ ৭। লেখের সাহায্যে সমাধান কর।

$$3x + 4y = 10 \quad (i)$$

$$x - y = 1 \quad (ii)$$

সমীকরণ (i) হতে পাই,

$$4y = 10 - 3x$$

$$y = \frac{10 - 3x}{4}$$

এর বিভিন্ন মানের জন্য x এর মান বের করে নিচের ছকটি তৈরি করি

x	-2	0	2	4	6
y	4	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-2

ছক-১

(ii) এর সমীকরণ হতে পাই,

$$x - y = 1$$

x এর বিভিন্ন মানের জন্য y এর মান বের করে নিচের ছকটি তৈরি করি :

x	2	0	2	4	6
y	-3	-1	1	3	5

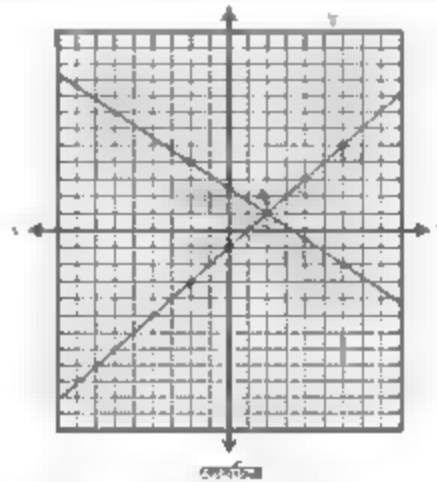
ছক-২

মনে করি, XX' ও YY' যথাক্রমে x -অক্ষ ও y -অক্ষ এবং O মূলবিন্দু।

উভয় অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতিসত্তর মৈত্রীকে একক ধরি। ছক ১ এ (১) এ, $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$, $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ ও $\left(6, -2\right)$

বিন্দুগুলোকে লেখ কাগজে স্থাপন করি। এই বিন্দুগুলো যোগ করে উভয় দিকে বর্ধিত করে একটি সরলরেখা পাওয়া গেল। যা (i) নং সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখার লেখচিত্র।

আবার ছক ২ এ (২) এ, $(2, -3)$, $(0, -1)$, $(2, 1)$ ও $(4, 3)$ বিন্দুগুলো লেখ কাগজে স্থাপন করি। এই বিন্দুগুলো যোগ করে উভয় দিকে বর্ধিত করে একটি সরলরেখা পাওয়া গেল। যা (ii) নং সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখার লেখচিত্র।



লেখচিত্র

এই সরলরেখাটি পূর্বোক্ত সরলরেখা থেকে $(2, 1)$ বিন্দুতে ছেদ করে। বিন্দু উভয় সরলরেখার সাধারণ বিন্দু। এর স্থানাঙ্ক উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করে লেখ থেকে দেখা যায় যে, $(2, 1)$ বিন্দুর ভূজ ২ এবং কোটি ১।
নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, 1)$

অনুশীলনী ৬.২

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১. $x + y = 5$, $x - y = 3$ হলে (x, y) এর মান নিচের কোনটি?ক) $(4, 1)$ খ) $(1, 4)$ গ) $(2, 3)$ ঘ) $(3, 2)$

২. নিচের কোনটি সরল রেখার সমীকরণ নির্দেশ করে না?

ক) $3x - 3y = 0$ খ) $x + y = 5$ গ) $x = \frac{1}{y}$ ঘ) $4x + 5y = 9$ ৩. $x - 2y = 8$ ও $3x - 2y = 4$ সমীকরণ জোড়ের x এর মান কত?ক) -5 খ) -2 গ) 2 ঘ) 5 ৪. $4x + 5y = 9$ সমীকরণটিতে কয়টি চলক আছে?ক) 0 খ) 1 গ) 2 ঘ) 3

৫. মূল বিন্দুর স্থানাংক কোনটি?

ক) $(0, 0)$ খ) $(0, 1)$ গ) $(1, 0)$ ঘ) $(1, 1)$ ৬. $(-3, -5)$ বিন্দুটি কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত?

ক) প্রথম

খ) দ্বিতীয়

গ) তৃতীয়

ঘ) চতুর্থ

৭. $x + 2y = 30$ সমীকরণের লেখচিত্রের উপর অবস্থিত বিন্দুi. $(10, 10)$ ii. $(0, 15)$ iii. $(10, 20)$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii

খ) i ও iii

গ) ii ও iii

ঘ) i, ii ও iii

♦ নিচের অনুচ্ছেদটি লক্ষ করে ৮ ও ৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও.

১ ও y সংখ্যা দুইটির বিয়োগফলের অর্ধেক ৪ বড় সংখ্যাটির সাথে ছোট সংখ্যাটির তিনগুণ যোগ করলে যোগফল ২০ হয়। যেখানে $x > y$ ।

৮. প্রথম শর্ত কোনটি?

ক) $x - y = 4$ খ) $x - y = 8$ গ) $y - x = 4$ ঘ) $y - x = 8$ ৯. (x, y) এর মান নিচের কোনটি?ক) $(3, 11)$ খ) $(7, 3)$ গ) $(11, 7)$ ঘ) $(11, 3)$

- ১০ দুইটি সংখ্যার যোগফল ১০০ এবং নিয়োগফল ২০ হলে, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।
- ১১ দুইটি সংখ্যার যোগফল ১৬০ এবং একটি অপরিষ্কার তিনত্ব হলে, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।
- ১২ দুইটি সংখ্যার প্রথমটির তিনত্বের সাথে দ্বিতীয়টির দুইত্ব যোগ করলে ১৭ হয়। আবার, প্রথমটির দুইত্ব থেকে দ্বিতীয়টি বিয়োগ করলে ৭ হয়। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।
- ১৩। ৭ বছর পূর্বে পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত ছিল ৩ : ১। এবং ১৭ বছর পর পিতা-পুত্রের বয়সের অনুপাত হবে ২ : ১। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর।
- ১৪ কোনো ভগ্নাংশের লবের সাথে ৭ যোগ করলে এর মান ২ হয়। আবার, হর থেকে ১ বিয়োগ করলে এর মান ১ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।
- ১৫। কোনো প্রকৃত ভগ্নাংশের লব ও হরের যোগফল ১৪ এবং বিয়োগফল ৮ হলে, ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।
- ১৬ দুই অক্ষর বিশিষ্ট কোনো সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের যোগফল ১০ এবং বিয়োগফল ৪ হলে, সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
- ১৭। একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য প্রস্থ অপেক্ষা ২৫ মিটার বেশি। আয়তাকার ক্ষেত্রটির পরিসীমা ১৫০ মিটার হলে, ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।
- ১৮ একজন বালক দোকান থেকে ১৫টি খাতা ও ১০টি পেন্সিল ৩০০ টাকা দিয়ে ক্রয় করলো। আবার অন্য একজন বালক একই দোকান থেকে একই ধরনের ১০টি খাতা ও ১৫টি পেন্সিল ২৫০ টাকায় ক্রয় করলো। প্রতিটি খাতা ও পেন্সিলের মূল্য নির্ণয় কর।
- ১৯ একজন লোকের নিকট ৫০০০ টাকা আছে। তিনি ঊন-টাকা দুই জনের মধ্যে এমনভাবে ভাগ করে দিলেন, যেন, প্রথম জনের টাকা দ্বিতীয় জনের ৪ গুণ হয়। প্রত্যেকের টাকার পরিমাণ নির্ণয় কর।
- ২০ লেখের সাহায্যে সমাধান কর।
- | | |
|-------------------|-------------------|
| ক. $x + y = 6$ | খ. $x + y = 11$ |
| $x - y = 2$ | $4x - y = 10$ |
| গ. $3x + 2y = 21$ | ঘ. $x + 2y = 1$ |
| $2x - 3y = 1$ | $x - y = 7$ |
| ঙ. $x - y = 0$ | চ. $4x + 3y = 11$ |
| $x + 2y = 15$ | $3x - 4y = 2$ |
- ২১ কোনো ভগ্নাংশের লবের সাথে ১ যোগ করলে ভগ্নাংশটির মান ২ হয়। আবার হর হতে ২ বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটির মান ১ হয়।
- ক) ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y}$ ধরে সমীকরণ জোট গঠন কর।
- খ) সমীকরণ জোটটি অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান করে (x, y) নির্ণয় কর।
- গ) সমীকরণ জোটটির লেখ অঙ্কন করে ছেদ বিন্দুর তুল ও কোটি নির্ণয় কর।

২২। একটি আয়তাকার বাগানের দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণ অপেক্ষা ৬ মিটার বেশি এবং বাগানটির পরিসীমা ৪০ মিটার।

- ক) দৈর্ঘ্য x মিটার ও প্রস্থ y মিটার হলে উপরের তথ্যের আলোকে দুইটি সমীকরণ গঠন কর
- খ) অপনয়ন পদ্ধতিতে সমীকরণ জোড়ের সমাধান কর
- গ) লেখচিত্রের সাহায্যে সমীকরণ জোড়ের সমাধান কর।

২৩। $7x - 3y = 31$ ও $9x - 5y = 4$ দুইটি সরল সমীকরণ।

- ক) $(4, -1)$ বিন্দুটি কোন সমীকরণকে সিদ্ধ করে তা নির্ণয় কর।
- খ) প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান কর
- গ) লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর।

সপ্তম অধ্যায় সেট

সেট শব্দটি আমাদের সুপরিচিত যেমন টিসেট, সোফাসেট, ডিনারসেট, এক সেট বই ইত্যাদি জ্ঞানার্জন গণিতবিদ জর্জ কান্টর (১৮৪৫-১৯১৮) সেট সম্পর্কে ধারণা ব্যাখ্যা করেন সেট সংক্রান্ত তাঁর ব্যাখ্যা গণিত শাস্ত্রে সেটতত্ত্ব (Set Theory) হিসেবে পরিচিত সেটের প্রাথমিক ধারণা থেকে প্রতীক ও চিত্রের মাধ্যমে সেট সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করা আবশ্যিক। এ অধ্যায়ে বিভিন্ন ধরনের সেট সেট প্রক্রিয়া ও সেটের ধর্মাবলি সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষাধীরা-

- সেট ও সেট গঠন প্রক্রিয়া ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সসীম সেট, সার্বিক সেট, পূনক সেট, ফাঁকা সেট, নিষ্কেন্দ্র সেট বর্ণনা করতে পারবে এবং এদের গঠন প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করতে পারবে।
- একাধিক সেটের সংযোগ সেট, ছেদ সেট গঠন ও ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ভেনচিত্র ও উদাহরণের সাহায্যে সেট প্রক্রিয়ার সহজ ধর্মাবলি যাচাই ও প্রমাণ করতে পারবে।
- সেটের ধর্মাবলি প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

৭.১ সেট (Set)

বাস্তব বা চিন্তাজগতের সু-সংজ্ঞায়িত বস্তুর সমাবেশ বা সংগ্রহকে সেট বলে। ইংরেজি বর্ণমালায় প্রথম পাঁচটি বর্ণ, এশিয়া মহাদেশের দেশসমূহ, স্বাভাবিক সংখ্যা ইত্যাদির সেট সু সংজ্ঞায়িত সেটের উদাহরণ। কোন বস্তু বিবেচনাধীন সেটের অন্তর্ভুক্ত আর কোনটি নয় তা সুনির্দিষ্টভাবে নির্ধারিত হতে হবে সেটের বস্তুর কোনো পুনরাবৃত্তি ও ক্রম নেই।

সেটের প্রত্যেক বস্তুকে সেটের উপাদান (element) বলা হয়। সেটকে সাধারণত ইংরেজি বর্ণমালায় বড় হাতের অক্ষর A, B, C, X, Y, Z দ্বারা এবং উপাদানকে ছোট হাতের অক্ষর a, b, c, x, y, z দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সেটের উপাদানগুলোকে এই প্রতীকের মধ্যে অন্তর্ভুক্ত করে সেট হিসেবে ব্যবহার করা হয় যেমন a, b, c এর সেট $\{a, b, c\}$ । তিস্তা, মেঘনা, যমুনা ও ব্রহ্মপুত্র নদ নদীর সেট $\{তিস্তা, মেঘনা, যমুনা, ব্রহ্মপুত্র\}$ । প্রথম দুইটি ক্ষোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $\{2, 4\}$ । ৬ এর গুণনীয়কসমূহের সেট $\{1, 2, 3, 6\}$ ইত্যাদি মনে করি, সেট A এর একটি উপাদান x , একে গাণিতিকভাবে $x \in A$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $x \in A$ কে পড়তে হয়, x A সেটের উপাদান (x belongs to A) যেমন, $B = \{m, n\}$ হলে, $m \in B$ এবং $n \in B$ ।

উদাহরণ ১। প্রথম পাঁচটি বিজোড় সংখ্যার সেট A হলে, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

কাজ :

- ১. সাক্ষরিত সেটগুলোর নামের সেট লেখ।
- ২. 1 থেকে 20 পর্যন্ত বৈজ্ঞানিক সংখ্যাসমূহের সেট লেখ।
- ৩. 300 ও 400 এর মধ্যে অবস্থিত 3 দ্বারা বিভাজ্য হওয়া এমন চারটি সংখ্যার সেট লেখ।

৭.২ সেট প্রকাশের পদ্ধতি

প্রধানত সেট দুই পদ্ধতিতে প্রকাশ করা হয় যথা, (১) তালিকা পদ্ধতি (Tabular Method) (২) সেট গঠন পদ্ধতি (Set Builder Method)

(১) তালিকা পদ্ধতি : এ পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদান সুনির্দিষ্টভাবে উল্লেখ করে দ্বিতীয় বন্ধনী } এর মধ্যে আবদ্ধ করা হয় এবং একাধিক উপাদানে থাকলে ‘কমা’ ব্যবহার করে উপাদানগুলোকে পৃথক করা হয় যেমন $\{1, 2, 3, B, \{x, y\}, C, 100, D, \{\text{মোস্তাফা, রক্তবীণিকা}, E, \{\text{রহিম, সুমন, গুহা, চাংপাই}\} \text{ ইত্যাদি।}$

(২) সেট গঠন পদ্ধতি : এ পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদান সুনির্দিষ্টভাবে উল্লেখ না করে উপাদান নির্ধারণের জন্য শর্ত দেওয়া থাকে যেমন $\{x : x \text{ এর চেয়ে ছোট স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার সেট } x \text{ হল, } x \in \{x : x \text{ স্বাভাবিক জোড় সংখ্যা, } x < 10\}$

এখানে, ‘x’ দ্বারা ‘একজন যেন’ বা সংক্ষেপে ‘যেন’ বোঝায়।

সেট গঠন পদ্ধতিতে : 1 এর চেয়ে ছোট ‘x’ চিহ্নের আগে একটি অজানা রাশি বা চলক ধরে নিতে হয় এবং পরে চলকের ওপর প্রয়োজনীয় শর্ত আরোপ করতে হয় যেমন $\{1, 6, 9, 12\}$ সেটটিকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ করতে চাই লক্ষ করি, 1 (6, 9, 12) সংখ্যাগুলো স্বাভাবিক সংখ্যা, 3 দ্বারা বিভাজ্য এবং 12 এর বড় নয়। এক্ষেত্রে সেটের উপাদানকে x চলক নির্বেচনা করলে 1 এর ওপর শর্ত হবে x স্বাভাবিক সংখ্যা, 3 এর গুণিতক এবং 12 এর চেয়ে বড় নয় $(x < 12)$

সুতরাং সেট গঠন পদ্ধতিতে হবে $\{x : x \text{ স্বাভাবিক সংখ্যা, } 3 \text{ এর গুণিতক এবং } x < 12\}$

উদাহরণ ২ $P = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ সেটটিকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

সমাধান : P সেটের উপাদানসমূহ 4, 8, 12, 16, 20

এখানে প্রত্যেকটি উপাদান জোড় সংখ্যা 4 এর গুণিতক এবং 20 এর বড় নয়।

$\therefore P = \{x : x \text{ স্বাভাবিক সংখ্যা, } 4 \text{ এর গুণিতক এবং } x \leq 20\}$

উদাহরণ ৩ $Q = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$ এর সকল গুণনীয়ক; সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

সমাধান : Q সেটটি 42 এর গুণনীয়কসমূহের সেট।

এখানে, $42 = 1 \times 42 = 2 \times 21 = 3 \times 14 = 6 \times 7$

42 এর গুণনীয়কসমূহ 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42

নির্ণয় সেট $Q = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$

কাজ :

১। $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ সেটটিকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

২। $B = \{x : x, 24 \text{ এর গুণনীয়ক}\}$ সেটটিকে বালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

৭.৩ সেটের প্রকারভেদ

সসীম সেট (Finite set)

যে সেটের উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায়, একে সসীম সেট বলে যেমন $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{5, 0, 15, 100\}$ ইত্যাদি সসীম সেট এক্ষেত্রে A সেটে ৪টি উপাদান এবং B সেটে ৪টি উপাদান আছে।

অসীম সেট (Infinite set)

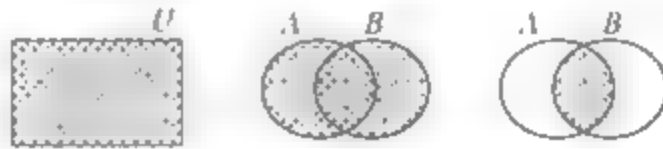
যে সেটের উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায় না, একে অসীম সেট বলে অসীম সেটের একটি উদাহরণ হলো স্বাভাবিক সংখ্যক সেট, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ এখন, \mathbb{N} সেটের উপাদান সংখ্যা অসংখ্য যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায় না। এই প্রেক্ষিতে শুধু সসীম সেট নিয়ে আলোচনা করা হবে।

ফাঁকা সেট (Empty set)

যে সেটের কোনো উপাদান নেই একে ফাঁকা সেট বলে, ফাঁকা সেটকে \emptyset প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

৭.৪ ভেনচিত্র (Venn-diagram)

জন ভেন (১৮৩৪-১৮৮৩) চিত্রের সাহায্যে সেট প্রকাশ করার রীতি প্রবর্তন করেন। এই চিত্রগুলো তাঁকে মাতামুসারে ভেনচিত্র নামে পরিচিত। ভেনচিত্রে সাধারণত অক্ষরাকার ও বৃত্তাকার ক্রেত্র ব্যবহার করা হয়। নিচে কয়েকটি সেটের ভেনচিত্র প্রদর্শন করা হলো।



ভেনচিত্র ব্যবহার করে অতি সহজে সেট ও সেট প্রক্রিয়ার বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য যাচাই করা যায়।

৭.৫ উপসেট (Subset)

মনে করি, $A = \{a, b\}$ একটি সেট। A সেটের উপাদান নিয়ে আমরা $\{a, b\}$, $\{a\}$, $\{b\}$ সেটগুলো গঠন করতে পারি। গঠিত $\{a, b\}$, $\{a\}$, $\{b\}$ সেটগুলো A সেটের উপসেট।

কোনো সেটের উপাদান থেকে যতগুলো সেট গঠন করা যায় এদের প্রত্যেকটি প্রদত্ত সেটের উপসেট। ফাঁকা সেট যেকোনো সেটের উপসেট।

যেমন $P = \{2, 3, 4, 5\}$ এবং $Q = \{3, 5\}$ হলে, Q সেটটি P সেটের উপসেট অর্থাৎ $Q \subset P$ কারণ Q সেটের ৩ এবং ৫ উপাদানসমূহ P সেটে বিদ্যমান। \subset প্রতীক দ্বারা উপসেটকে সূচিত করা হয়।

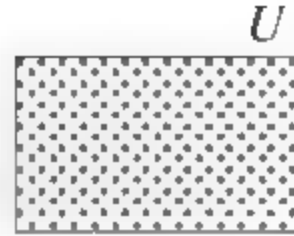
উদাহরণ ৪। $A = \{1, 2, 3\}$ এর উপসেটসমূহ লেখ।

সমাধান : A সেটের উপসেটসমূহ নিম্নরূপ :

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, \{2\}, \{3\}\}, \emptyset$

সার্বিক সেট (Universal Set)

আলোচ্য সংশ্লিষ্ট সকল সেট যদি একটি নির্দিষ্ট সেটের উপসেট হয় তবে ঐ নির্দিষ্ট সেটকে এর উপসেটগুলোর সাপেক্ষে সার্বিক সেট বলে। সার্বিক সেটকে U প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয় যেমন : কোনো বিদ্যালয়ের সকল শিক্ষার্থীর সেট হলো সার্বিক সেট এবং অষ্টম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের সেট উক্ত সার্বিক সেটের উপসেট।



সকল সেট সার্বিক সেটের উপসেট।

উদাহরণ ৫। $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $B = \{1, 3, 5\}$; $C = \{3, 4, 5, 6\}$; হলে সার্বিক সেট নির্ণয় কর।

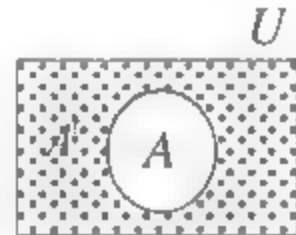
সমাধান : দেওয়া আছে, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$

এখানে B সেটের উপাদান $1, 3, 5$ এবং C সেটের উপাদান $3, 4, 5, 6$ যা A সেটে বিদ্যমান।

B এবং C সেটের সাপেক্ষে সার্বিক সেট A

পূরক সেট (Complement of a set)

যদি U সার্বিক সেট এবং A সেটটি U এর উপসেট হয় তবে, A সেটের বহির্ভূত সকল উপাদান নিয়ে যে সেট গঠন করা হয়, একে A সেটের পূরক সেট বলে। A এর পূরক সেটকে A' বা A^c দ্বারা প্রকাশ করা হয়।



মনে করি, অষ্টম শ্রেণির ৬০ জন শিক্ষার্থীর মধ্যে ৩ জন অনুপস্থিত। অষ্টম শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীকে সার্বিক সেট বিবেচনা করলে উপস্থিত $(60 - 3)$ বা 57 জনের সেটের পূরক সেট হবে অনুপস্থিত ৩ জনের সেট।

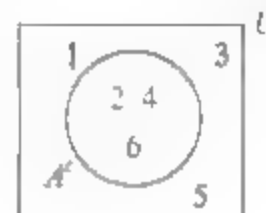
উদাহরণ ৬। $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ এবং $A = \{2, 4, 6\}$ হলে A' নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ এবং $A = \{2, 4, 6\}$

$A' = A$ এর পূরক সেট

$= A$ এর বহির্ভূত উপাদানসমূহের সেট

$= \{1, 3, 5\}$



নির্ণেয় সেট $A' = \{1, 3, 5\}$

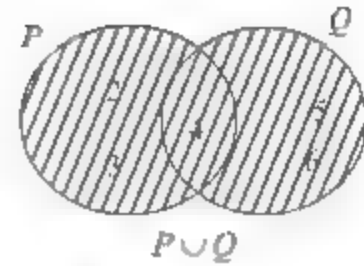
কাজ :

১। $\{a, b, c\}$ হলে A এর উপসেটসমূহ নির্ণয় কর এবং যেকোনো দুইটি উপসেট নিয়ে এদের পূরক সেট নির্ণয় কর।

৭.৬ সেট প্রক্রিয়া

সংযোগ সেট (Union of sets)

মনে করি, $P = \{2, 3, 4\}$ এবং $Q = \{4, 5, 6\}$, এখানে P এবং Q সেটের অন্তর্ভুক্ত উপাদানসমূহ ২, ৩, ৪, ৫, ৬, P ও Q সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেট $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ বা P ও Q সেটদ্বয়ের সংযোগ সেট।



দুই বা ততোধিক সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে সংযোগ সেট বলা হয়।

ধরি, A ও B দুইটি সেট। A ও B এর সংযোগ সেটকে $A \cup B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় A সংযোগ B অথবা ' A union B '।

সেট গঠন পদ্ধতিতে $A \cup B = \{x : x \in A \text{ অথবা } x \in B\}$

উদাহরণ ৭। $C = \{\text{রাজস্বাক, সাকিব, অলোক}\}$ এবং $D = \{\text{অলোক, মুনফিক}\}$ হলে, $C \cup D$ নির্ণয় কর।
সমাধান : দেওয়া আছে, $C = \{\text{রাজস্বাক, সাকিব, অলোক}\}$ এবং $D = \{\text{অলোক, মুনফিক}\}$

$$\begin{aligned} C \cup D &= \{\text{রাজস্বাক, সাকিব, অলোক}\} \cup \{\text{অলোক, মুনফিক}\} \\ &= \{\text{রাজস্বাক, সাকিব, অলোক, মুনফিক}\} \end{aligned}$$

উদাহরণ ৮ $R = \{1, 2, 3, 6\}$ -এর গুণনীয়কসমূহ; এবং $S = \{1, 2, 4, 8\}$ -এর গুণনীয়কসমূহ। হলে, $R \cup S$ নির্ণয় কর।

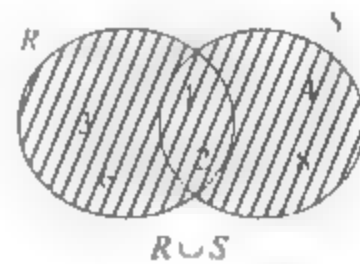
সমাধান : দেওয়া আছে, $R = \{x : x, 6\}$ -এর গুণনীয়কসমূহ;

$$\{1, 2, 3, 6\}$$

এবং $S = \{x : x, 8\}$ -এর গুণনীয়কসমূহ;

$$\{1, 2, 4, 8\}$$

$$\begin{aligned} R \cup S &= \{1, 2, 3, 6\} \cup \{1, 2, 4, 8\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \end{aligned}$$



ছেদ সেট (Intersection of sets)

মনে করি, রিনা বাংলা ও আরবি ভাষা পড়তে ও লিখতে পারে এবং জয়া বাংলা ও হিন্দি ভাষা পড়তে ও লিখতে পারে। রিনা যে ভাষা পড়তে ও লিখতে পারে এদের সেট 'বাংলা-আরবি' এবং জয়া যে ভাষা পড়তে ও লিখতে পারে এদের সেট 'বাংলা-হিন্দি'। লক্ষ্য করি, রিনা ও জয়া প্রত্যেকে যে ভাষা পড়তে ও লিখতে পারে তা হচ্ছে বাংলা এবং এর সেট 'বাংলা'। এখানে 'বাংলা' সেটটি ছেদ সেট।

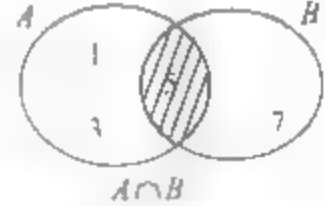
দুই বা ততোধিক সেটের সাধারণ ((common)) উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে ছেদ সেট বলা হয়।

যদি, A ও B দুইটি সেট $A \cap B$ এর ছেদ সেটকে $A \cap B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় A ছেদ B সেট গঠন পদ্ধতিতে $A \cap B = \{x : x \in A \text{ এবং } x \in B\}$

উদাহরণ ৯। $A = \{1, 3, 5\}$ এবং $B = \{5, 7\}$ হলে, $A \cap B$ নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $A = \{1, 3, 5\}$ এবং $B = \{5, 7\}$

$$\therefore A \cap B = \{1, 3, 5\} \cap \{5, 7\} = \{5\}$$



উদাহরণ ১০। $P = \{x : x, 2 \text{ এর গুণিতক এবং } x \leq 8\}$ এবং $Q = \{x : x, 4 \text{ এর গুণিতক এবং } x \leq 12\}$ হলে, $P \cap Q$ নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $P = \{x : x, 2 \text{ এর গুণিতক এবং } x \leq 8\}$

$$= \{2, 4, 6, 8\}$$

$$\text{এবং } Q = \{x : x, 4 \text{ এর গুণিতক } x \leq 12\}$$

$$= \{4, 8, 12\}$$

$$P \cap Q = \{2, 4, 6, 8\} \cap \{4, 8, 12\} = \{4, 8\}$$

কাজ : $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{1, 3\}$

$U \cap A$, $C \cap A$, এবং $B \cup C$ সেটগুলোকে সের্বচিত্রে প্রদর্শন কর।

নিষ্ছেদ সেট (Disjoint sets)

মনে করি বাংলাদেশের পাশাপাশি দুইটি গ্রাম একটি গ্রামের কৃষকগণ জমিতে ধান ও পাট চাষ করেন এবং অপর গ্রামের কৃষকগণ জমিতে আলু ও সরিষা চাষ করেন। চাষকৃত ফসলের সেট দুইটি বিবেচনা করলে পাই $\{ \text{ধান, পাট} \}$ এবং $\{ \text{আলু, সরিষা} \}$ উক্ত সেট দুইটিতে ফসলের কোনো ছিল নেই অর্থাৎ, দুই গ্রামের কৃষকগণ একই জাতীয় ফসল চাষ করেন না, এখানে সেট দুইটি পরস্পর নিষ্ছেদ সেট।



যদি দুইটি সেটের উপাদানগুলোর মধ্যে কোনো সাধারণ উপাদান না থাকে, তবে সেট দুইটি পরস্পর নিষ্ছেদ সেট।

যদি, A ও B দুইটি সেট $A \cap B$ পরস্পর নিষ্ছেদ সেট হলে যদি $A \cap B = \emptyset$ হয়

দুইটি সেটের ছেদ সেট ফাঁকা সেট হলে সেটদ্বয় পরস্পর নিষ্ছেদ সেট।

উদাহরণ ১১। $A = \{x : x, \text{ বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা এবং } 1 < x < 7\}$ এবং

$B = \{x : x, 4 \text{ এর গুণনীয়কসমূহ}\}$ হলে, দেখাও যে, A ও B সেটদ্বয় পরস্পর নিষ্ছেদ সেট

সমাধান : দেওয়া আছে, $A = \{x : x, \text{ বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা এবং } 1 < x < 7\}$

$$= \{3, 5\}$$

এবং $B = \{x : x, 8 \text{ এর গুণনীয়কসমূহ}\}$

$$= \{1, 2, 4, 8\}$$

$$A \cap B = \{3, 5\} \cap \{1, 2, 4, 8\}$$

$$= \emptyset$$

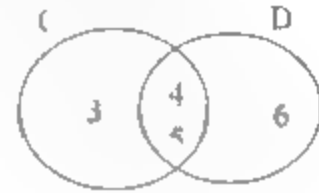
A ও B সেটের পরস্পর নিষ্পেষিত সেট।

উদাহরণ ১২। $C = \{3, 4, 5\}$ এবং $D = \{4, 5, 6\}$ হলে, $C \cup D$ এবং $C \cap D$ নির্ণয় কর

সমাধান : দেওয়া আছে, $C = \{3, 4, 5\}$ এবং $D = \{4, 5, 6\}$

$$C \cup D = \{3, 4, 5\} \cup \{4, 5, 6\} = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$\text{এবং } C \cap D = \{3, 4, 5\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 5\}$$



কাজ

$P = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ এবং $Q = \{4, 6, 8\}$ হলে,

১. $P \cup Q$ এবং $P \cap Q$ নির্ণয় কর

২. $P \cup Q$ এবং $P \cap Q$ কে সেট পরিসর পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

উদাহরণ ১৩। $F = \{x : x, \text{ মৌলিক সংখ্যা এবং } x < 30\}$, সেটটি তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর

সমাধান : নির্ণয় সেটটি হলে ১(১) অপেক্ষা ছোট মৌলিক সংখ্যাসমূহের সেট

এখানে ১(১) অপেক্ষা ছোট মৌলিক সংখ্যাসমূহ ২, ৩, ৫, ৭, ১১, ১৩, ১৭, ১৯, ২৩, ২৯

নির্ণয় সেট = $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$

উদাহরণ ১৪। A ও B যথাক্রমে ৪২ ও ৭০ এর সকল গুণনীয়কের সেট হলে, $A \cap B$ নির্ণয় কর

সমাধান :

এখানে, $42 = 1 \times 42 = 2 \times 21 = 3 \times 14 = 6 \times 7$

৪২ এর গুণনীয়কসমূহ ১, ২, ৩, ৬, ৭, ১৪, ২১, ৪২

$$A = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$$

আবার, $70 = 1 \times 70 = 2 \times 35 = 5 \times 14 = 7 \times 10$

৭০ এর গুণনীয়কসমূহ ১, ২, ৫, ৭, ১০, ১৪, ৩৫, ৭০

$$B = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$$

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\} \cap \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\} = \{1, 2, 7, 14\}$$

ফর্মী ১৬, পণ্ডিত অষ্টম শ্রেণি (দাখিল)

অনুশীলনী ৭

১। সেট প্রকাশের পদ্ধতি কয়টি?

- ক) ১ টি খ) ২ টি গ) ৩ টি ঘ) ৪ টি

২। নিচের কোনটি যে কোনো সেটের উপসেট?

- ক) $\{0\}$ খ) $\{\emptyset\}$ গ) \emptyset ঘ) $\{\emptyset\}$

৩। $\{0\}$ সেটের উপাদান সংখ্যা কয়টি?

- ক) ০ খ) ১ গ) ২ ঘ) ৩

৪। $S = \{x : x \text{ জোড় সংখ্যা এবং } 1 < x < 7\}$ সেটটি তালিকা পদ্ধতিতে নিচের কোনটি সঠিক?

- ক) $\{2, 3, 4\}$ খ) $\{2, 4, 6\}$ গ) $\{1, 3, 5\}$ ঘ) $\{3, 5, 7\}$

৫। $A = \{2, 3, 4\}$ এবং $B = \{5, 7\}$ হলে $A \cap B$ নিচের কোনটি?

- ক) \emptyset খ) $\{0\}$ গ) $\{5, 7\}$ ঘ) $\{2, 3, 4, 5, 7\}$

৬। $I = \{x : x \text{ জোড় সংখ্যা এবং } 4 < x < 6\}$ এর তালিকা পদ্ধতি কোনটি?

- (ক) $\{5\}$ (খ) $\{4, 6\}$ (গ) $\{4, 5, 6\}$ (ঘ) \emptyset

৭। $P = \{x, y, z\}$ হলে, নিচের কোনটি P এর উপসেট নয়?

- (ক) $\{x, y\}$ (খ) $\{x, w, z\}$ (গ) $\{x, y, z\}$ (ঘ) \emptyset

৮। $\{0\}$ এর গুণনীয়কসমূহের সেট কোনটি?

- (ক) $\{1, 2, 5, 10\}$ (খ) $\{1, 10\}$ (গ) $\{10\}$ (ঘ) $\{10, 20, 30\}$

৯। $A = \{2, 3, 5\}$ হলে-

- i. $A = \{x \in \mathbb{N} : 1 < x < 6 \text{ এবং } x \text{ মৌলিক সংখ্যা}\}$
 ii. $A = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leq x < 7 \text{ এবং } x \text{ মৌলিক সংখ্যা}\}$
 iii. $A = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leq x \leq 5 \text{ এবং } x \text{ মৌলিক সংখ্যা}\}$

নিচের কোনটি সঠিক?

- ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

১০। নিচের তথ্যের আলোকে ১০ ও ১১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$U = \{2, 3, 5, 7\} \quad A = \{2, 5\} \quad B = \{3, 5, 7\}$$

১০। A^c কোনটি?

- ক) $\{2, 5\}$ খ) $\{3, 5\}$ গ) $\{3, 7\}$ ঘ) $\{2, 7\}$

১১। $A \cap B^c$ কোনটি?

- ক) $\{2\}$ খ) $\{5\}$ গ) $\{2, 5\}$ ঘ) $\{3, 7\}$

পাশের ভেনচিত্রটির আলোকে ১২ থেকে ১৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

১২. সার্বিক সেট কোনটি ?

(ক) $\{$ (খ) B (গ) $\{ B$ (ঘ) U

১৩। কোনটি B^c সেট ?

(ক) $\{5, 6, 7, 8\}$ (খ) $\{2, 3, 5, 6\}$ (গ) $\{1, 4, 7, 8\}$ (ঘ) $\{3, 6\}$

১৪. কোনটি $A \cap B$ সেট ?

(ক) $\{2, 3\}$ (খ) $\{2, 3, 5, 6\}$ (গ) $\{3, 4, 6, 7\}$ (ঘ) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

১৫. কোনটি $A \cup B$ সেট ?

(ক) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (খ) $\{5, 6, 7\}$ (গ) $\{8\}$ (ঘ) $\{3\}$

১৬. নিচের সেটগুলোকে ডালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর :

- (ক) $x : x$, বিজোড় সংখ্যা এবং $3 < x < 15$
 (খ) $\{x : x = 48 \text{ এর হৌলিক গুণনীয়কসমূহ}\}$
 (গ) $\{x : x, 3 \text{ এর গুণিতক এবং } x < 36\}$
 (ঘ) $\{x : x, \text{ পূর্ণসংখ্যা এবং } x^2 < 10\}$

১৭. নিচের সেটগুলোকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর :

(ক) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (খ) $\{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$ (গ) $\{7, 11, 13, 17\}$

১৮। নিচের সেট দুইটির উপসেট ও উপসেটের সংখ্যা নির্ণয় কর :

(ক) $C = \{m, n\}$ (খ) $D = \{5, 10, 15\}$

১৯. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, a\}$ এবং $C = \{a, b\}$ হলে, নিচের সেটগুলো নির্ণয় কর।

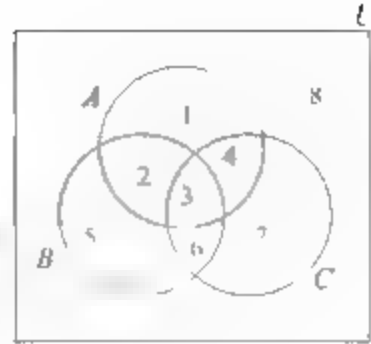
- (ক) $A \cup B$ (খ) $B \cap C$
 (গ) $A \cap (B \cup C)$ (ঘ) $(A \cup B) \cup C$
 (ঙ) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$

২০। যদি $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{2, 4, 7\}$ এবং

$C = \{4, 5, 6\}$ হয়, তবে নিম্নলিখিত সম্পর্কগুলোর সত্যতা যাচাই কর

- (ক) $A \cap B = B \cap A$
 (খ) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
 (গ) $(A \cup C)' = A' \cap C'$

২১. P এবং Q যথাক্রমে ২১ ও ১৭ এর সকল গুণনীয়কের সেট হলে $P \cap Q$ নির্ণয় কর



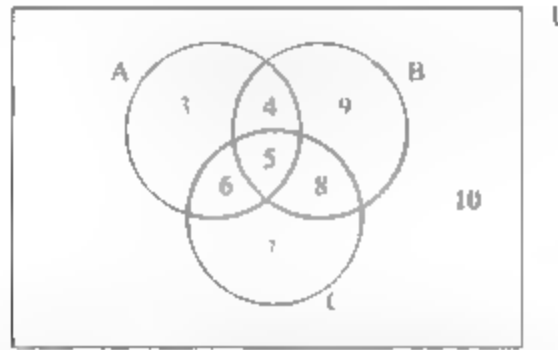
২২ কোনো ছাত্রাবাসের ৬৫% ছাত্র মাছ পছন্দ করে, ২৫% ছাত্র মাংস পছন্দ করে এবং ৪০% ছাত্র উভয় খাদ্য পছন্দ করে।

(ক) সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ উপরের তথ্যগুলো ভেনচিত্রে প্রকাশ কর।

(খ) উভয় খাদ্য পছন্দ করে না তাদের সংখ্যা নির্ণয় কর।

(গ) যারা শুধু একটি খাদ্য পছন্দ করে তাদের সংখ্যার গুণনীয়ক সেটের ছেন সেট নির্ণয় কর।

২৩



ক) A সেটটি সেট গঠন পদ্ধতিতে লিখ।

খ) A, B ও C কে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর এবং $A \cap C$ ও $A \cup B$ নির্ণয় কর।

গ) প্রমাণ কর যে, $(A \cup B)' = A' \cap B'$

২৪। সার্বিক সেট $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ এর তিনটি উপসেট

$A = \{x \in N : x < 7 \text{ এবং } x \text{ বিজোড় সংখ্যা}\}$

$B = \{x \in N : x < 7 \text{ এবং } x \text{ জোড় সংখ্যা}\}$

$C = \{x \in N : x \leq 3 \text{ এবং } x \text{ মৌলিক সংখ্যা}\}$

ক) A ও B সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

খ) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ নির্ণয় কর।

গ) $(B \cup C)'$ এর উপসেটগুলো লিখ।

২৫ যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 346 ও 556 কে ভাগ করলে প্রতিশেষে 31 অবশিষ্ট থাকে তাদের সেট যথাক্রমে A ও B

ক) A সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

খ) $A \cap B$ নির্ণয় কর।

গ) $A \cap B$ ভেনচিত্রে দেখাও এবং $A \cap B$ এর উপসেটগুলো লিখ।

অষ্টম অধ্যায়

চতুর্ভুজ

[এই অধ্যায়ের প্রয়োজনীয় পূর্বজ্ঞান বইয়ের শেষে পরিশিষ্ট অংশে সংযুক্ত আছে। প্রথমে পরিশিষ্ট অংশ পায় আলোচনা করতে হবে।] পূর্ববর্তী শ্রেণিতে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ সম্পর্কে আলোচনা হয়েছে। আমরা ত্রিভুজ অঙ্কন করতে যেয়ে দেখেছি যে, একটি সুনির্দিষ্ট ত্রিভুজ আকৃতি তিনটি পরিমাপের প্রয়োজন। স্বাভাবিকভাবেই প্রশ্ন জাগে একটি চতুর্ভুজ আকৃতি চারটি পরিমাপ যথেষ্ট কি না। বর্তমান অধ্যায়ে এ বিষয়ে আলোচনা করা হবে। তাছাড়া বিভিন্ন প্রকার চতুর্ভুজ যেমন সামান্তরিক, আয়ত, বর্গ, চমস এর বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য রয়েছে। এ অধ্যায়ে বিভিন্ন প্রকার চতুর্ভুজের এ সকল বৈশিষ্ট্য ও চতুর্ভুজ অঙ্কন বিষয়ে আলোচনা থাকবে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষাবীরা —

- চতুর্ভুজের ধর্মাবলি ঘাচাই ও যুক্তিমূলক প্রমাণ করতে পারবে।
- প্রদত্ত উপাত্ত হতে চতুর্ভুজ আঁকতে পারবে।
- ত্রিভুজ সূত্রের সাহায্যে চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে।
- আয়তাকার ঘনবস্তুর চিত্র আঁকতে পারবে।
- আয়তাকার ঘনবস্তু ও ঘনকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে।

৮.১ চতুর্ভুজ (Quadrilateral)

চারটি রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ চিত্র একটি চতুর্ভুজ। চিত্র দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রটি একটি চতুর্ভুজক্ষেত্র।

চতুর্ভুজের চারটি বাহু আছে। যে চারটি রেখাংশ দ্বারা ক্ষেত্রটি আবদ্ধ হয়, এ চারটি রেখাংশই চতুর্ভুজের বাহু।



! B , C ও D বিন্দু চারটির মেকোনো তিনটি সমরেখ নয়। AB , BC , CD ও DA রেখাংশ চারটি সংযোগে $ABCD$ চতুর্ভুজ গঠিত হয়েছে। AB , BC , CD ও DA চতুর্ভুজটির চারটি বাহু। A , B , C ও D চারটি কোণিক বিন্দু বা শীর্ষবিন্দু। $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ ও $\angle DAB$ চতুর্ভুজের চারটি কোণ। A ও B শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে C ও D শীর্ষের বিপরীত শীর্ষবিন্দু। AB ও CD পরস্পর বিপরীত বাহু এবং AD ও BC পরস্পর বিপরীত বাহু। এক শীর্ষবিন্দুতে যে দুইটি বাহু মিলিত হয়, এরা সন্নিহিত বাহু যেমন, AB ও BC বাহু দুইটি সন্নিহিত বাহু। AC ও BD রেখাংশদ্বয় $ABCD$ চতুর্ভুজের দুইটি কর্ণ। চতুর্ভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের সমষ্টিকে এর পরিমাপ বলে। $ABCD$ চতুর্ভুজের পরিমাপ $(AB + BC + CD + DA)$ এর দৈর্ঘ্যের সমান। চতুর্ভুজকে অনেক সময় ‘□’ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

৮.২ চতুর্ভুজের প্রকারভেদ (Types of Quadrilaterals)

সামান্তরিক - যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান্তরাল, তা সামান্তরিক। সামান্তরিকের সমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে সামান্তরিকক্ষেত্র বলে।

আয়ত : যে সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ, তাই আয়ত। আয়তের চারটি কোণ সমকোণ। আয়তের সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে আয়তক্ষেত্র বলে।



সামান্তরিক



আয়ত

রম্বস : রম্বস এমন একটি সামান্তরিক যার সন্নিহিত বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান। অর্থাৎ, রম্বসের বিপরীত বাহুগুলো সমান্তরাল এবং চারটি বাহু সমান। রম্বসের সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে রম্বসক্ষেত্র বলে।

বর্গ : বর্গ এমন একটি আয়ত যার সন্নিহিত বাহুগুলো সমান। অর্থাৎ, বর্গ এমন একটি সামান্তরিক যার প্রতিটি কোণ সমকোণ এবং বাহুগুলো সমান। বর্গের সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে বর্গক্ষেত্র বলে।



রম্বস



বর্গ

ট্রাপিজিয়াম : যে চতুর্ভুজের এক জোড়া বিপরীত বাহু সমান্তরাল, একে ট্রাপিজিয়াম বলা হয়। ট্রাপিজিয়ামের সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র বলে।



ট্রাপিজিয়াম

ঘুড়ি : যে চতুর্ভুজের দুই জোড়া সন্নিহিত বাহু সমান, একে ঘুড়ি বলা হয়।



ঘুড়ি

কাজ :

১. তোমার আশেপাশের বিভিন্ন বস্তুর ধারকে সরলরেখা ধরে সামান্তরিক, আয়ত, বর্গ ও রম্বস চিহ্নিত কর।
২. উক্তিগুলো সঠিক কিনা যাচাই কর।
 - (ক) বর্গ একটি আয়ত, আবার বর্গ একটি রম্বসও।
 - (খ) ট্রাপিজিয়াম একটি সামান্তরিক।
 - (গ) সামান্তরিক একটি ট্রাপিজিয়াম।
 - (ঘ) আয়ত বা রম্বস বর্গ নয়।
৩. বর্গের সংজ্ঞায় বলা হয়েছে বর্গ এমন একটি আয়ত যার বাহুগুলো সমান। রম্বসের মাধ্যমে বর্গের সংজ্ঞা দেওয়া যায় কি?

৮.৩ চতুর্ভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য (Theorems related to Quadrilaterals)

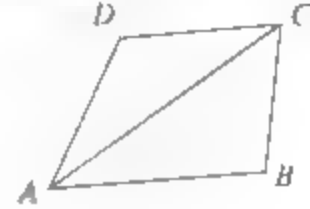
বিভিন্ন প্রকারের চতুর্ভুজের কিছু সাধারণ ধর্ম রয়েছে। এ ধর্মগুলো উপপাদ্য আকারে প্রমাণ করা হলো।

উপপাদ্য ১

চতুর্ভুজের চারটি কোণের সমষ্টি চার সমকোণ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $ABCD$ একটি চতুর্ভুজ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4$ সমকোণ।



অঙ্কন: A ও C যোগ করি। AC কর্ণটি চতুর্ভুজটিকে $\triangle ABC$ ও $\triangle ADC$ দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করেছে।

প্রমাণ:

ধাপ	স্বার্থভা
(১) $\triangle ABC$ এ $\angle BAC + \angle ACB + \angle B = 2$ সমকোণ।	[ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি ২ সমকোণ]
(২) অনুরূপভাবে, $\triangle DAC$ এ $\angle DAC + \angle ACD + \angle D = 2$ সমকোণ।	[ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি ২ সমকোণ]
(৩) অতএব, $\angle DAC + \angle ACD + \angle D + \angle BAC + \angle ACB + \angle B = (2+2)$ সমকোণ।	[(১) ও (২) থেকে]
(৪) $\angle DAC + \angle BAC = \angle A$ এবং $\angle ACD + \angle ACB = \angle C$	[সন্নিহিত কোণের যোগফল]
সুতরাং, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4$ সমকোণ (প্রমাণিত)	[সন্নিহিত কোণের যোগফল] [(৩) থেকে]

উপপাদ্য ২

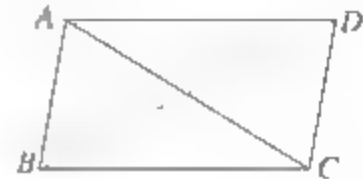
সামান্তরিকের বিপরীত বাহু ও কোণগুলো পরস্পর সমান।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $ABCD$ একটি সামান্তরিক এবং

AC ও BD তার দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে,

(ক) AB বাহু $= CD$ বাহু, AD বাহু $= BC$ বাহু

(খ) $\angle BAD = \angle BCD$, $\angle ABC = \angle ADC$



প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) $AB \parallel DC$ এবং AC তাদের ছেদক, সুতরাং $\angle BAC = \angle ACD$	[একান্তর কোণ সমান]
(২) আবার, $BC \parallel AD$ এবং AC তাদের ছেদক, সুতরাং $\angle ACB = \angle DAC$	[একান্তর কোণ সমান]
(৩) এখন $\triangle ABC$ ও $\triangle ADC$ এ $\angle BAC = \angle ACD$, $\angle ACB = \angle DAC$ এবং AC বাহু সাধারণ। $\triangle ABC \cong \triangle ADC$	[ত্রিভুজের কোণ-বাহু-কোণ উপপাদ্য]
অতএব, $AB = CD$, $BC = AD$ ও $\angle ABC = \angle ADC$ অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে, $\triangle BAD \cong \triangle CBD$ সুতরাং, $\angle BAD = \angle BCD$ [প্রমাণিত]	

কাজ:

- প্রমাণ কর যে চতুর্ভুজের এক কোণ বিপরীতে বাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হলে, তা একটি সামান্তরিক।
- দেওয়া আছে $ABCD$ চতুর্ভুজে $AB = CD$ এবং $\angle ABD = \angle BDC$ ।
প্রমাণ কর যে, $ABCD$ একটি সামান্তরিক।



উপপাদ্য ৩

সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

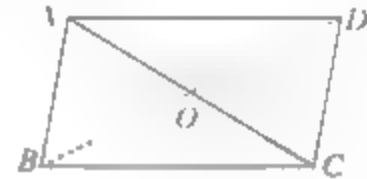
বিশেষ নির্বাচন : মনে করি, $ABCD$ সামান্তরিকের
 AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AO = CO$, $BO = DO$

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) AB ও DC রেখাদ্বয় সমান্তরাল এবং AC এদের ছেদক। অতএব, $\angle BAC =$ একান্তর $\angle ACD$	[একান্তর কোণ সমান]
(২) AB ও DC রেখাদ্বয় সমান্তরাল এবং BD এদের ছেদক। সুতরাং, $\angle BDC =$ একান্তর $\angle ABD$	[একান্তর কোণ সমান]
(৩) এখন, $\triangle AOB$ ও $\triangle COD$ এ $\angle OAB = \angle OCD$, $\angle OBA = \angle ODC$ এবং $AB = DC$	[ত্রিভুজের কোণ-বাহু-কোণ উপপাদ্য]
সুতরাং, $\triangle AOB \cong \triangle COD$	
অতএব, $AO = CO$ এবং $BO = DO$ (প্রমাণিত)	

কাজ : ১। প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক।



উপপাদ্য ৪

আয়তের কর্ণদ্বয় সমান ও পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $ABCD$ আয়তের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে,

- (i) $AC = BD$
(ii) $AO = CO, BO = DO$

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) আয়ত একটি সামান্তরিক সুতরাং, $AO = CO, BO = DO$	[সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
(২) এখন $\triangle ABD$ ও $\triangle DCB$ এ $AB = DC$ এবং $\angle ABD = \angle DCB$ অন্তর্ভুক্ত $\angle DAB =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle BDC$ সুতরাং, $\triangle ABD \cong \triangle DCB$ অতএব, $AC = BD$ প্রমাণিত।	[সামান্তরিকের বিপরীত বাহু পরস্পর সমান] [সাধারণ বাহু] [প্রত্যেকের সমকোণ] [ত্রিকোণের বাহু কোণ বাহু উপপাদ্য]

কাজ :

- ১। প্রমাণ কর যে, আয়তের প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ।

উপপাদ্য ৫

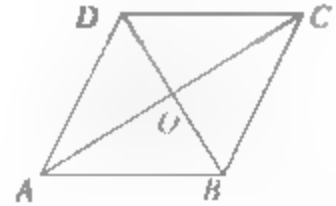
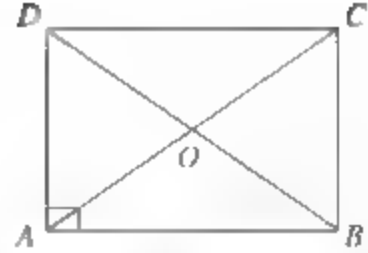
রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি $ABCD$ রম্বসের
 AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রমাণ করতে হবে যে,

- (i) $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 90^\circ$ সমকোণ
(ii) $AO = CO, BO = DO$

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) রম্বস একটি সামান্তরিক সুতরাং, $AO = CO, BO = DO$	[সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
(২) এখন $\triangle AOB$ ও $\triangle COD$ এ $AB = CD$ $AO = CO$ এবং $OB = OD$ অতএব, $\triangle AOB \cong \triangle COD$	[রম্বসের বাহুগুলো সমান] [(১) থেকে] [সাধারণ বাহু] [ত্রিকোণের বাহু-বাহু-বাহু উপপাদ্য]



সুতরাং $\angle AOB = \angle BOC$.

$\angle AOB + \angle BOC = 1$ সমকোণ $= 2$ সমকোণ।

$\angle AOB = \angle BOC = 1$ সমকোণ।

অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে,

$\angle COD = \angle DOA = 1$ সমকোণ (প্রমাণিত)

কাজ:

১. দেখাও যে, বর্গের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
২. একজন রাজমিস্ত্রি একটি আয়তাকার কংক্রিট স্ল্যাব তৈরি করেছেন। তিনি কত বিভিন্ন ভাবে নির্দিষ্ট হতে পারেন যে তাঁর তৈরি স্ল্যাবটি সত্যিই আয়তাকার?

৮.৪ চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল (Area of Quadrilaterals)

একটি চতুর্ভুজের একটি কর্ণ দ্বারা চতুর্ভুজক্ষেত্রটি দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত হয়। অতএব, চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের যোগফলের সমান। পূর্ববর্তী শ্রেণিতে আমরা বর্গক্ষেত্র ও আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে শিখেছি। আবার আয়ত ও সামান্তরিকের ভূমি ও উচ্চতা একই হলেও উল্লিখিত ক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান। নিচে রম্বস ও ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়কৌশল নিয়ে আলোচনা করা হবে।

(ক) ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল:

$ABCD$ একটি ট্রাপিজিয়াম যেখানে $AB \parallel CD$, $AB = a$, $CD = b$ এবং AB ও CD এর লম্ব দূরত্ব $= h$

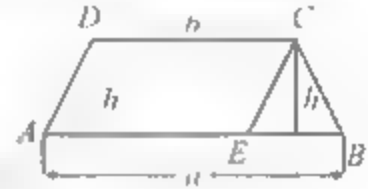
C বিন্দু দিয়ে $DA \parallel CE$ আঁক।

$AECD$ একটি সামান্তরিক। চিত্র থেকে

$ABCD$ ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= H(1)$ সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $+ \triangle CEB$ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= b \times h + \frac{1}{2}(a - b) \times h$$

$$= \frac{1}{2}(a + b) \times h$$



ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=$ সামান্তরিক বাহুদ্বয়ের সমষ্টির গড় \times উচ্চতা।

কাজ :

- ১। বিকল্প পদ্ধতিতে ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) রম্বসক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে। তাই রম্বসের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য জানা থাকলে সহজেই রম্বসক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।

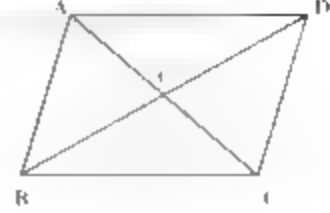
যদি $ABCD$ রম্বসের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্যকে যথাক্রমে a ও b দ্বারা নির্দেশ করি।

রমসংক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $DA'C'$ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + $B'IC'$ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} a \times \frac{1}{2} h + \frac{1}{2} a \times \frac{1}{2} h$$

$$= \frac{1}{2} a \times h$$

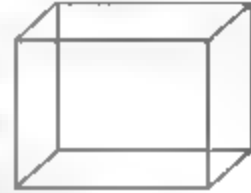
রমসংক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = কর্ণদ্বয়ের গুণফলের অর্ধেক



৮.৫ ঘনবস্তু (Solid)

বই, বাক্স ইট, ফুটবল ইত্যাদি ঘনবস্তু। ঘনবস্তু আয়তাকার, বর্গাকার, গোলাকার ও অন্যান্য আকারের হতে পারে। ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা আছে।

চিত্র-১ এর বস্তুটি আয়তাকার ঘনবস্তু। এর মোট ছয়টি আয়তাকার পৃষ্ঠ বা তল আছে যাদের প্রতিটি একটি আয়তক্ষেত্র। পরস্পর বিপরীত পাশের পৃষ্ঠদ্বয় সমান ও সমান্তরাল। কাজেই পরস্পর বিপরীত পাশের দুইটি পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল সমান।



চিত্র-১

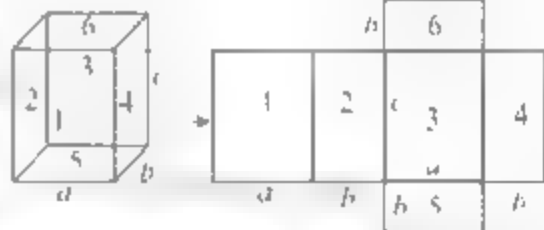
চিত্র-২ এর বস্তুটি বর্গাকার ঘনবস্তু। এর মোট ছয়টি পরস্পর সমান বর্গাকার পৃষ্ঠ বা তল আছে যাদের প্রতিটি একটি বর্গক্ষেত্র। আবার পরস্পর বিপরীত পৃষ্ঠদ্বয় সমান্তরাল। বর্গাকার ঘনবস্তুকে ঘনক (cube) বলা হয়। পরস্পর দুইটি করে পৃষ্ঠের ছেদ-রেখাংশকে ঘনকের ধার বা বাহু বলা হয়। ঘনকের সকল ধার বা বাহু পরস্পর সমান। কাজেই ঘনকের সকল পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।



চিত্র-২

ঘনবস্তুর পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় :

(ক) আয়তাকার ঘনবস্তু : একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য a একক হলে, চিত্রানুসারে, ঘনবস্তুটির সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = $(ab + ab) + (bc + bc) + (ac + ac)$ বর্গএকক = $2(ab + bc + ac)$ বর্গএকক



(খ) ঘনক : একটি ঘনকের ধার a একক হলে, এর ছয়টি

পৃষ্ঠের প্রতিটির ক্ষেত্রফল = $a \times a$ বর্গ একক = a^2 বর্গ একক। অতএব, ঘনকটির সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = $6a^2$ বর্গ একক

উদাহরণ : একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য ৭.৫ সে.মি., প্রস্থ ৬ সে.মি. ও উচ্চতা ৪ সে.মি. ঘনবস্তুটির সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, কোনো আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য a একক, প্রস্থ b একক ও উচ্চতা c একক হলে,

বস্তুটির সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল

$$= 2(ab + bc + ac) \text{ বর্গ একক।}$$

এখানে, $a = 7.5$ সে.মি., $b = 6$ সে.মি. এবং $c = 4$ সে.মি.

প্রদত্ত আয়তাকার ঘনবস্তুটির সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল

$$= 2(7.5 \times 6 + 6 \times 4 + 7.5 \times 4) \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 2(45 + 24 + 30) \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 2 \times 99 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 198 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

অনুশীলনী ৮.১

১. সামান্তরিকের জন্য নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. বিপরীত বাহুগুলো অসমান্তরাল

গ. বিপরীত বাহুদ্বয় অসমান

২. নিচের কোনটি রম্বসের বৈশিষ্ট্য ?

ক. কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান

গ. বিপরীত কোণদ্বয় অসমান

খ. একটি কোণ সমকোণ হলে, তা আয়ত

ঘ. কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান

খ. কোণগুলো সমকোণ

ঘ. বাহুগুলো পরস্পর সমান

৩. i. চতুর্ভুজের চার কোণের সমষ্টি চার সমকোণ।

ii. আয়তের দুইটি সন্নিহিত বাহু সমান হলে তা একটি বর্গ।

iii. রম্বস একটি সামান্তরিক

উপরের তথ্য অনুসারে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii

খ. i ও iii

গ. ii ও iii

ঘ. i, ii ও iii

৪. $PAQC$ চতুর্ভুজের $PA = CQ$ এবং $PA \parallel CQ$

$\angle 1$ ও $\angle 2$ এর সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে AB ও CD হলে

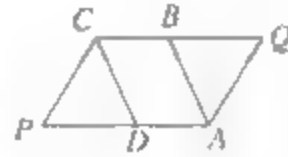
$ABCD$ ক্ষেত্রটির নাম কী ?

ক. সামান্তরিক

খ. রম্বস

গ. আয়ত

ঘ. বর্গ



৫. চিত্রে, $\triangle ABC$ এর মধ্যমা BO কে D পর্যন্ত

এমনভাবে বর্ধিত করি যেন $BO = OD$ হয়।

প্রমাণ কর যে, $ABCD$ একটি সামান্তরিক।

৬. প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের একটি কর্ণ একে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে

৭. প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজের বিপরীত বাহু(গুলো) পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হলে তা একটি সামান্তরিক

৮. প্রমাণ কর যে সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান হলে তা একটি আয়ত

৯. প্রমাণ কর যে চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান হলে এবং পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করলে, তা একটি বর্গ।

১০. প্রমাণ কর যে, আয়তের সন্নিহিত বাহুর মধ্যবিন্দুসমূহের যোগে যে চতুর্ভুজ হয়, তা একটি রম্বস

১১. প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের যেকোনো দুইটি বিপরীত কোণের সমদ্বিখণ্ডক পরস্পর সমান্তরাল

১২. প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের যেকোনো দুইটি সন্নিহিত কোণের সমদ্বিখণ্ডক পরস্পর লম্ব

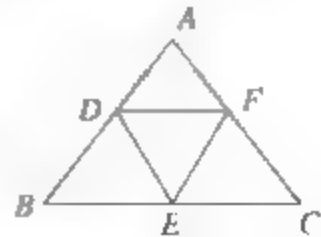
১৩. চিত্রে, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। D, E ও F

যথাক্রমে AB, BC ও AC এর মধ্যবিন্দু।

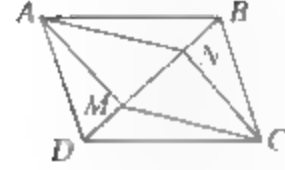
ক. প্রমাণ কর যে,

$\angle BDF + \angle DFE + \angle FEB + \angle EBD$ চার সমকোণ।

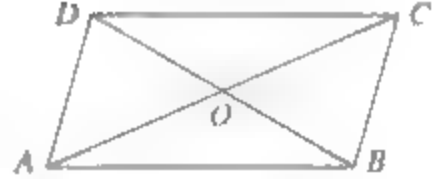
খ. প্রমাণ কর যে, $DF \parallel BC$ এবং $DF = \frac{1}{2} BC$



- ১৪ চিত্রে, $ABCD$ সামান্তরিকের AM ও CN , DB এর উপর লম্ব প্রমাণ কর যে, $ANCM$ একটি সামান্তরিক।



- ১৫। চিত্রে, $AB = CD$ এবং $AB \parallel CD$
ক) B ভূমিনিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজের নাম লেখ
খ) প্রমাণ কর যে, AD ও BC পরস্পর সমান ও সমান্তরাল
গ) দেখাও যে, $OA = OC$ এবং $OB = OD$



- ১৬ $ABCD$ একটি সামান্তরিক। AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে
ক) $\angle BAD = 70^\circ$ হলে $\angle ABC$ এর মান নির্ণয় কর।
খ) $AC = BD$ হলে প্রমাণ কর যে, $ABCD$ একটি আয়ত।
গ) $AB \perp AD$ হলে প্রমাণ কর যে, AC ও BD পরস্পরকে O বিন্দুতে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে
- ১৭ $ABCD$ চতুর্ভুজে AC ও BD কর্ণদ্বয় অসমান এবং যেকোনো দু'টি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।
ক) চিত্রসহ ঘড়ির সংজ্ঞা দাও।
খ) প্রমাণ কর যে, $AB = CD$ এবং $AD = BC$ ।
গ) B ও D বিন্দু হতে AC এর উপর BP এবং DQ লম্ব আঁকা হলে প্রমাণ কর যে, $BP \parallel DQ$ একটি সামান্তরিক
- ১৮ একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে ১০ সে.মি., ৪ সে.মি. এবং ৫ সে.মি. ঘনবস্তুটির সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
- ১৯ একটি ঘনকাকৃতি বাক্সের দৈর্ঘ্য ৬ সে.মি. হলে, বাক্সটির সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর

সম্পাদ্য

৮.৬ চতুর্ভুজ অঙ্কন (Construction of Quadrilaterals)

পূর্ববর্তী শ্রেণিতে আমরা জেনেছি, ত্রিভুজের তিনটি বাহু দেওয়া থাকলে নির্দিষ্ট ত্রিভুজ আঁকা যায় কিন্তু চতুর্ভুজের চারটি বাহু দেওয়া থাকলে নির্দিষ্ট কোনো চতুর্ভুজ আঁকা যায় না। চতুর্ভুজ অঙ্কনের জন্য আরও উপাত্তের প্রয়োজন। চতুর্ভুজের চারটি বাহু চারটি কোণ ও দুইটি কর্ণ এই মোট দশটি উপাত্ত আছে একটি চতুর্ভুজ আঁকতে পাঁচটি অনন্য নিরপেক্ষ উপাত্তের প্রয়োজন যেমন কোনো চতুর্ভুজের চারটি বাহু ও একটি নির্দিষ্ট কোণ দেওয়া থাকলে, চতুর্ভুজটি আঁকা যাবে।

নিম্নোক্ত পাঁচটি উপাত্ত জানা থাকলে, নির্দিষ্ট চতুর্ভুজটি আঁকা যায়।

- (ক) চারটি বাহু ও একটি কোণ
- (খ) চারটি বাহু ও একটি কর্ণ
- (গ) তিনটি বাহু ও দুইটি কর্ণ
- (ঘ) তিনটি বাহু ও এদের অন্তর্ভুক্ত দুইটি কোণ
- (ঙ) দুইটি বাহু ও তিনটি কোণ।

অনেক সময় কম উপাত্ত দেওয়া থাকলেও বিশেষ চতুর্ভুজ আঁকা যায়। এক্ষেত্রে যুক্তি দ্বারা পাঁচটি উপাত্ত পাওয়া যায়।

- একটি বাহু দেওয়া থাকলে, বর্গ আঁকা যায়। এখানে চারটি বাহুই সমান এবং একটি কোণ সমকোণ।
- দুইটি সন্নিহিত বাহু দেওয়া থাকলে, প্রান্ত্র আঁকা যায়। এখানে বিপরীত বাহু দুইটি পরস্পর সমান এবং একটি কোণ সমকোণ।
- একটি বাহু এবং একটি কোণ দেওয়া থাকলে, রম্বস আঁকা যায়। এখানে চারটি বাহুই সমান।
- দুইটি সন্নিহিত বাহু এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া থাকলে, সামান্তরিক আঁকা যায়। এখানে বিপরীত বাহু দুইটি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

সম্পাদ্য ১

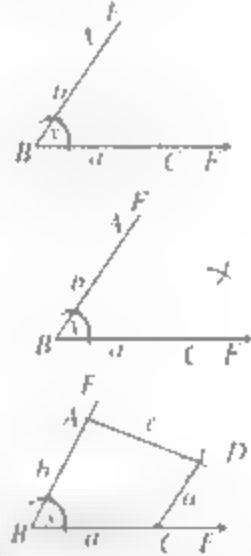
কোনো চতুর্ভুজের চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য ও একটি কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করি, একটি চতুর্ভুজের চার বাহুর দৈর্ঘ্য a, b, c, d এবং a ও b বাহুর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle x$ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ :

- (১) যেকোনো রশ্মি BE থেকে $BC = a$ নিই। B বিন্দুতে $\angle EBF = \angle x$ আঁকি।
- (২) BF থেকে $BA = b$ নিই। A ও C কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c ও d এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। এরা পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করে।
- (৩) A ও D এবং C ও D যোগ করি। তাহলে, $ABCD$ ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।



প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে,

$AB = b, BC = a, AD = c, DC = d$ এবং $\angle ABC = \angle x$
 $ABCD$ ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।

কাজ :

১. একটি চতুর্ভুজ আঁকতে চারটি বাহু ও একটি কোণের পরিমাপের প্রয়োজন। এই পাঁচটি যেকোনো পরিমাপের হলে কি চতুর্ভুজটি আঁকা যাবে?

সম্পাদ্য ২

কোনো চতুর্ভুজের চারটি বাহু ও একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করি, একটি চতুর্ভুজের চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য a, b, c, d এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য e দেওয়া আছে, যেখানে $a + b > e$ এবং $c + d > e$ । চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।



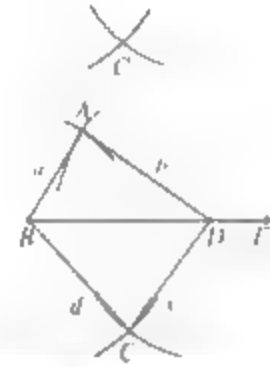
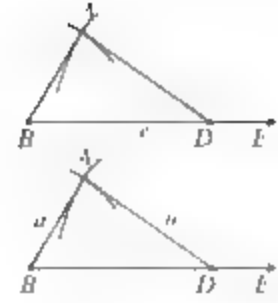
অঙ্কনের বিবরণ :

(১) যেকোনো রশ্মি BE থেকে $BD = e$ নিই। B ও D কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে a ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় A বিন্দুতে ছেদ করে।

(২) আবার, B ও D কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে d ও c এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর বিপরীত দিকে আরও দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। এই বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করে।

(৩) A ও B , A ও D , B ও C এবং C ও D যোগ করি।
তাহলে, $ABCD$ ই উদ্ভিষ্ট চতুর্ভুজ।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $AB = a$, $AD = b$, $BC = d$, $CD = c$ এবং
অর্ধ $BD = e$
সুতরাং, $ABCD$ ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।



কাজ :

- একটি চতুর্ভুজ আঁকতে চারটি বাহু ও একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য পরিমাপের প্রয়োজন। এই লাচটি যেকোনো পরিমাপের হলে কি চতুর্ভুজটি আঁকা যাবে? কোমর উত্তরের পক্ষে যুক্তি নাও।
- একজন শিক্ষার্থী একটি চতুর্ভুজ PLI আঁকতে চেষ্টা করেন তার $PL = 3$ সে.মি, $LI = 4$ সে.মি, $I = 4.5$ সে.মি $P = 2$ সে.মি $L = 6$ সে.মি। সে চতুর্ভুজটি আঁকতে পারলে না কেন?

সম্পাদ্য ও

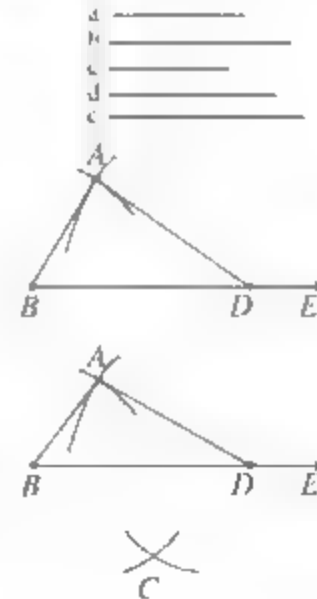
কোনো চতুর্ভুজের তিনটি বাহু ও দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে

মনে করি, একটি চতুর্ভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য a, b, c এবং দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য d, e দেওয়া আছে, যেখানে $a + b > e$ । চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ :

(১) যেকোনো রশ্মি BE থেকে $BD = e$ নিই। B ও D কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে a ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় A বিন্দুতে ছেদ করে।

(২) আবার, D ও A কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c ও d এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর বিপরীত দিকে আরও দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। এই বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে।



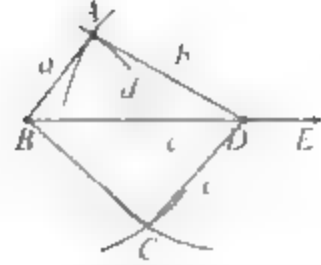
(৩) A ও B , A ও D , B ও C এবং C ও D যোগ করি।

তাহলে, $ABCD$ ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $AB = a$, $AD = b$, $CD = c$

এবং কর্ণ $BD = e$ ও $AC = d$

সুতরাং, $ABCD$ ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।



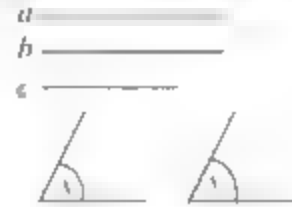
সম্পাদ্য ৪

কোনো চতুর্ভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য ও দুইটি অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করি, একটি চতুর্ভুজের তিনটি বাহু a, b, c এবং a ও b

বাহুর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle x$ এবং a ও c বাহুর অন্তর্ভুক্ত কোণ

$\angle y$ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ : যেকোনো রশ্মি BF থেকে $BC = a$ নিই

B ও C বিন্দুতে $\angle x$ ও $\angle y$ এর সমান করে যথাক্রমে

$\angle CBF$ ও $\angle BCG$ অঙ্কন করি। BF থেকে $BA = b$ এবং

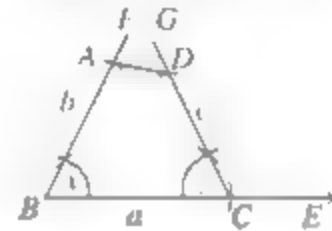
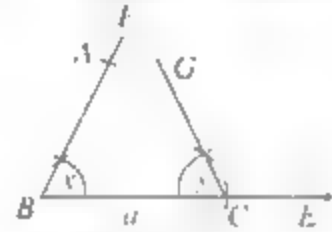
CG থেকে $CD = c$ নিই। A, D যোগ করি।

তাহলে, $ABCD$ ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $AB = b$, $BC = a$, $CD = c$,

$\angle ABC = \angle x$ ও $\angle BCD = \angle y$

সুতরাং $ABCD$ ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।



সম্পাদ্য ৫

কোনো চতুর্ভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য ও তিনটি কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করি, একটি চতুর্ভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহু a, b এবং

তিনটি কোণ $\angle x, \angle y, \angle z$ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি

আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ : যেকোনো রশ্মি BE থেকে $BC = a$ নিই

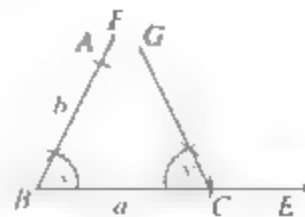
B ও C বিন্দুতে $\angle x$ ও $\angle y$ এর সমান করে যথাক্রমে

$\angle CBF$ ও $\angle BCG$ অঙ্কন করি। BF থেকে $BA = b$ নিই।

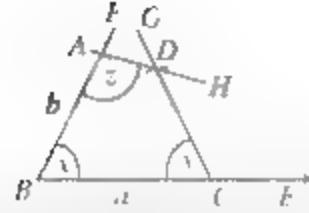
A বিন্দুতে $\angle z$ এর সমান করে $\angle BAH$ অঙ্কন করি। AH ও

CG পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, $ABCD$ ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।



প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $AB = b$, $BC = a$,
 $\angle ABC = \angle x$, $\angle DCB = \angle y$ ও $\angle BAD = \angle z$
 সুতরাং $ABCD$ ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।



কাজ

- একটি চতুর্ভুজের সন্নিহিত নয় এরূপ দুই বাহুর দৈর্ঘ্য ও তিনটি কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি কি আঁকা যাবে?
- একজন শিক্ষার্থী একটি চতুর্ভুজ $STOP$ আঁকতে চাইলেন যার $ST = 5$ সে.মি, $TO = 4$ সে.মি, $\angle S = 20^\circ$, $\angle T = 30^\circ$, $\angle O = 40^\circ$ । সে চতুর্ভুজটি কেন আঁকতে পারলো না?

সম্পাদ্য ৬

কোনো সামান্তরিকের সন্নিহিত দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য এবং বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে।

সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

মনে করি, একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু a ও b এবং

এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle x$ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে



অঙ্কনের বিবরণ : যেকোনো রূপে BE থেকে $BC = a$ নিই।

B বিন্দুতে $\angle EBF = \angle x$ অঙ্কন করি। BF থেকে b এর

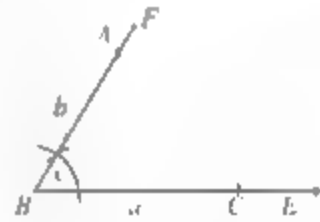
সমান BA নিই। A ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে

a ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$ এর অন্তর্ভুক্ত দুইটি

বুঁটাচাপ আঁকি। এরা পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

A, D ও C, D যোগ করি। তাহলে, $ABCD$ ই উদ্দিষ্ট

সামান্তরিক।



প্রমাণ : A, C যোগ করি। $\triangle ABC$ ও $\triangle ADC$ এ

$AB = CD = b$,

$AD = BC = a$ এবং AC বাহু সাধারণ।

$\triangle ABC \cong \triangle ADC$

অতএব, $\angle BAC = \angle DCA$ । কিন্তু, কোণ দুইটি একান্তর কোণ।

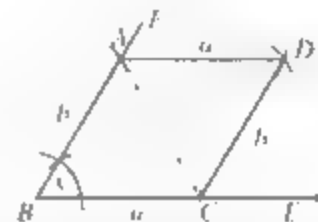
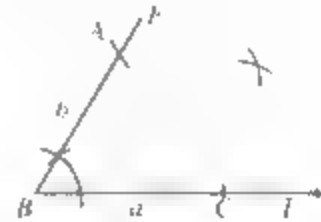
$AB \parallel CD$

অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে, $BC \parallel AD$

সুতরাং $ABCD$ একটি সামান্তরিক।

আবার অঙ্কন অনুসারে $\angle ABC = \angle x$

অতএব, $ABCD$ ই নির্ণেয় সামান্তরিক।



লক্ষ করি শুধুমাত্র একটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকলেই বর্গ আঁকা সম্ভব। বর্গের বাহুগুলো সমান আর কোণগুলো প্রত্যেকটি সমকোণ। তাই বর্গ অঙ্কনের জন্য প্রয়োজনীয় পাঁচটি শর্ত সহজেই পূরণ করা যায়।

ফর্ম-১৮, গণিত-অষ্টম শ্রেণি (দাখিল)

সম্পাদ্য ৭

কোনো বর্গের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে, বর্গটি আঁকতে হবে।

মনে করি, a কোনো বর্গের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য। বর্গটি আঁকতে হবে

অঙ্কনের বিবরণ : যেকোনো রশ্মি BE থেকে $BC = a$ নিই।

B বিন্দুতে $BF \perp BC$ আঁকি।

BF থেকে $BA = a$ নিই। A ও C কে কেন্দ্র করে a এর

সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ

আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে। A ও D

এবং C ও D যোগ করি।

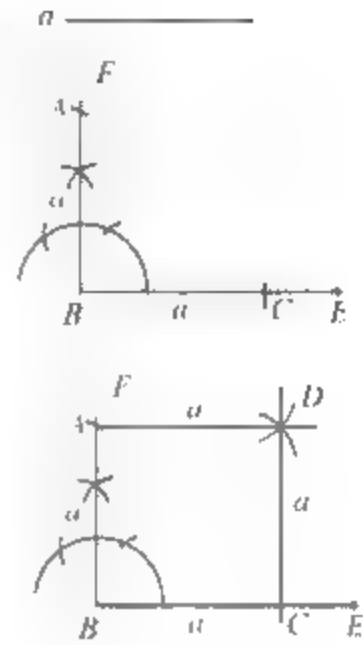
তাহলে, $ABCD$ ই উদ্ভিষ্ট বর্গ।

প্রমাণ : $ABCD$ চতুর্ভুজের $AB = BC = CD = DA = a$

এবং $\angle ABC =$ এক সমকোণ।

সুতরাং, এটি একটি বর্গ।

অতএব, $ABCD$ ই নির্ণেয় বর্গ।



অনুশীলনী ৮.২

১ একটি চতুর্ভুজ আঁকতে কয়টি অনন্য নির্দেশক উপাত্তের প্রয়োজন?

ক. ৩টি

খ. ৪টি

গ. ৫টি

ঘ. ৬টি

২ নিচের কোন ক্ষেত্রে কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে?

ক) বর্গ ও আয়ত

খ) রম্বস ও সামান্তরিক

গ) আয়ত ও ঘূড়ি

ঘ) রম্বস ও ঘূড়ি

৩ একটি রম্বসের কর্ণদ্বয় ৬ সে.মি. এবং ৪ সে.মি. হলে এর বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

ক) ৪.৭ সে.মি. (প্রায়)

খ) ৫ সে.মি.

গ) ৬.৭ সে.মি. (প্রায়)

ঘ) ৭ সে.মি.

৪ একটি ঘূড়ির পরিসীমা ২৪ সে.মি. এবং অসমান বাহুদ্বয়ের অনুপাত ২-১ হলে এর ক্ষুদ্রতর বাহুর দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?

ক) ৪

খ) ৬

গ) ৪

ঘ) ৩

৫ একটি ট্র্যাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দূরত্ব ৩ সে.মি. এবং ক্ষেত্রফল ৪৪ বর্গ সে.মি. এর সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের গড় কত সে.মি.?

ক) ৪

খ) ১৬

গ) ২৪

ঘ) ৩২

৬. সকল সামান্তরিকের-

- বিপরীত বাহুগুলো সমান ও সমান্তরাল
- বিপরীত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল
- ক্ষেত্রফল = সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের গুণফল

নিচের কোনটি সঠিক?

- ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

৭. একটি আয়তের সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য ৬ সে.মি. এবং ৩ সে.মি. হলে এর

- অর্ধ পরিসীমা ৭ সে.মি.
- কর্ণের দৈর্ঘ্য ৫ সে.মি.
- ক্ষেত্রফল ১২ বর্গ সে.মি.

নিচের কোনটি সঠিক?

- ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

৮. i. দুইটি সন্নিহিত বাহু দেওয়া থাকলে আয়ত আঁকা যায়।

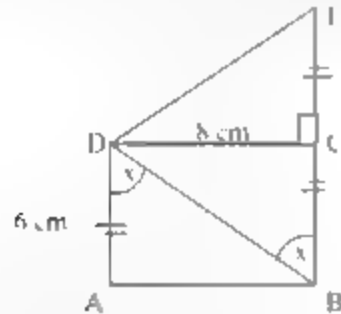
ii. চারটি কোণ দেওয়া থাকলে একটি চতুর্ভুজ আঁকা যায়।

iii. বর্গের একটি বাহু দেওয়া থাকলে বর্গ আঁকা যায়।

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

- ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

◆ নিচের চিত্রের আলোকে ৯-১২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



৯. $BD =$ কত সে.মি.?

- ক) ৭ খ) ৮ গ) ১০ ঘ) ১২

১০. চতুর্ভুজ ABED এর পরিসীমা কত সে.মি.?

- ক) ২৪ খ) ২৬ গ) ৩০ ঘ) ৩৬

১১. $\triangle BDE$ এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

- ক) ৪৮ খ) ৩৬ গ) ২৮ ঘ) ২৪

১২. ABED চতুর্ভুজকেবের ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ক) 48

খ) 64

গ) 72

ঘ) 96

১৩. নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে চতুর্ভুজ অঙ্কন কর :

ক. চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য ২ সে.মি., ২.৫ সে.মি., ৩.৪ সে.মি. ও ৩ সে.মি. এবং একটি কোণ 45°

খ. চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য ৪ সে.মি., ২ সে.মি., ৩.৫ সে.মি. ও ৫ সে.মি. এবং একটি কোণ 60°

গ. চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য ২.২ সে.মি., ২.৫ সে.মি., ২.৫ সে.মি. ও ২.৪ সে.মি. এবং একটি কর্ণ ৫ সে.মি.

ঘ. চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য ৩.২ সে.মি., ২ সে.মি., ২.৫ সে.মি. ও ২.৪ সে.মি. এবং একটি কর্ণ ৫ সে.মি.

ঙ. তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য ২ সে.মি., ৩.৫ সে.মি., ২.৫ সে.মি. এবং কোণ এদের অন্তর্ভুক্ত 60° ও 45°

চ. তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য ২ সে.মি., ৪ সে.মি., ৪.৫ সে.মি. এবং দুইটি কর্ণ ৫.২ সে.মি. ও ৬ সে.মি.

১৪. একটি কর্ণের বাহুর দৈর্ঘ্য ৪ সে.মি., বর্গটি আঁক।

১৫. রম্বসের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য ২.৫ সে.মি. ও একটি কোণ 75° রম্বসটি আঁক।

১৬. আয়তের দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে ৩ সে.মি. ও ৪ সে.মি., আয়তটি আঁক।

১৭. ABCD চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটি AC ও BD O বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করে যেন $OA = 4.2$ সে.মি. $OB = ৫.৪$ সে.মি., $OC = ২.7$ সে.মি., $OD = ৪.৫$ সে.মি. ও $\angle AOB = \angle COD$ হয়। চতুর্ভুজটি আঁক।

১৮. দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। আয়তটি আঁক।

১৯. কর্ণ এবং একটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। আয়তটি আঁকতে হবে।

২০. একটি বাহু এবং দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

২১. একটি বাহু এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।

২২. দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।

২৩. একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু ৪ সে.মি. ও ৩ সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60°

ক. প্রদত্ত তথ্যগুলো চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. অঙ্কনের বিবরণসহ সামান্তরিকটি আঁক।

গ. অঙ্কনের বিবরণসহ সামান্তরিকটির বৃহত্তম কর্ণের সমান কর্ণবিশিষ্ট একটি বর্গ আঁক।

২৪. দুইটি নির্দিষ্ট রেখাংশ $a = 6$ সে.মি., $b = 4.5$ সে.মি. এবং দুইটি কোণ $\angle x = 75^\circ$ ও $\angle y = 85^\circ$

ক) পেন্সিল কম্পাসে $\angle x$ আঁক।

খ) রেখাংশ দুটিকে সন্নিহিত বাহু বিবেচনা করে একটি আয়ত আঁক। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যিক)

গ) a ও b কে সমান্তরাল বাহু এবং প্রদত্ত কোণ দুটিকে a বাহু সংলগ্ন কোণ বিবেচনা করে ট্র্যাপিজিয়াম আঁক। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যিক)

নবম অধ্যায় পিথাগোরাসের উপপাদ্য

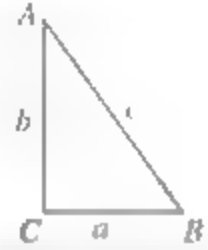
খ্রিষ্টপূর্ব ষষ্ঠ শতাব্দীর গ্রিক দার্শনিক পিথাগোরাস সমকোণী ত্রিভুজের একটি বিশেষ বৈশিষ্ট্য নিরূপণ করেন। সমকোণী ত্রিভুজের এ বৈশিষ্ট্য পিথাগোরাসের বৈশিষ্ট্য বলে পরিচিত। বলা হয় পিথাগোরাসের জন্মের আগে মিশরীয় ও বাবিলীয় যুগেও সমকোণী ত্রিভুজের এ বৈশিষ্ট্যের ব্যবহার ছিল। এ অধ্যায়ে আমরা সমকোণী ত্রিভুজের এ বৈশিষ্ট্য নিয়ে আলোচনা করব। সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলো বিশেষ নামে পরিচিত। সমকোণের বিপরীত বাহু অতিভুজ এবং সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় যথাক্রমে ভূমি ও উর্ধ্ব। বর্তমান অধ্যায়ে এ তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্যের মধ্যে যে সম্পর্ক রয়েছে সে বিষয়ে আলোচনা করা হবে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা—

- পিথাগোরাসের উপপাদ্য যাচাই ও প্রমাণ করতে পারবে।
- ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকলে ত্রিভুজটি সমকোণী কি না যাচাই করতে পারবে।
- পিথাগোরাসের সূত্র ব্যবহার করে সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

৯.১ সমকোণী ত্রিভুজ

চিত্রে, $\triangle ABC$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ, এর $\angle C$ কোণটি সমকোণ।
সুতরাং $\triangle ABC$ ত্রিভুজটির অতিভুজ চিত্রে ত্রিভুজটির বাহুগুলো a, b, c দ্বারা নির্দেশ করি।



কাজ

১. একটি সমকোণ ত্রিভুজ এবং এর বাহু দুইটির উপর যথাক্রমে ৩ সে.মি ও ৪ সে.মি দূরত্বে দুইটি বিন্দু চিহ্নিত করে বিন্দু দুইটি যোগ করে একটি সমকোণী ত্রিভুজ ত্রিভুজটির অতিভুজের দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে দৈর্ঘ্য ৫ সে.মি হয়েছে কি?

লক্ষ কর, $3^2 + 4^2 = 5^2$ অর্থাৎ দুই বাহুর দৈর্ঘ্য পরিমাপের বর্গের যোগফল অতিভুজের পরিমাপের বর্গের সমান।

সুতরাং a, b, c বাহু দ্বারা নির্দেশিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রে $c^2 = a^2 + b^2$ হবে। এটি পিথাগোরাসের উপপাদ্যের মূল প্রতিপাদ্য। এই উপপাদ্যটি বিভিন্নভাবে প্রমাণ করা হয়েছে। এখানে কয়েকটি সহজ প্রমাণ দেওয়া হলো।

৯.২ পিথাগোরাসের উপপাদ্য

একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

(দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের সাহায্যে)

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B = 90^\circ$

অতিভুজ $AC = b$, $AB = c$ ও $BC = a$

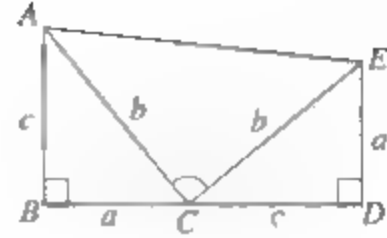
প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2$, অর্থাৎ

$$b^2 = c^2 + a^2$$

অঙ্কন : BC কে D পর্যন্ত বর্ধিত করি, যেন $CD = AB = c$ হয়।

D বিন্দুতে বর্ধিত BC এর উপর DE লম্ব আঁকি, যেন

$DE = BC = a$ হয়। C, E ও A, E যোগ করি।



প্রমাণ :

ধাপ

(১) $\triangle ABC$ ও $\triangle CDE$ এ $AB = CD = c$, $BC = DE = a$

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle B$ অন্তর্ভুক্ত $\angle D$

সুতরাং, $\triangle ABC \cong \triangle CDE$

$$AC = CE = b \text{ এবং } \angle BAC = \angle ECD$$

(২) আবার, $AB \perp BD$ এবং $ED \perp BD$ বলে $AB \parallel ED$

সুতরাং, $ABDE$ একটি ট্রাপিজিয়াম।

(৩) তদুপরি, $\angle ACB + \angle BAC = \angle ACB + \angle ECD =$ এক সমকোণ।

$\angle ACE =$ এক সমকোণ। $\therefore \triangle ACE$ সমকোণী ত্রিভুজ।

এখন $ABDE$ ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল

$$= (\triangle \text{ ক্ষেত্র } ABC + \triangle \text{ ক্ষেত্র } CDE + \triangle \text{ ক্ষেত্র } ACE)$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} BD(AB + DE) = \frac{1}{2} ac + \frac{1}{2} ac + \frac{1}{2} b^2$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} (BC + CD)(AB + DE) = \frac{1}{2} [2ac + b^2]$$

$$\text{বা, } (a + c)(a + c) = 2ac + b^2 \text{ [2 দ্বারা গুণ করে]}$$

$$\text{বা, } a^2 + 2ac + c^2 = 2ac + b^2$$

$$\therefore b^2 = c^2 + a^2 \text{ (প্রমাণিত)}$$

স্বার্থতা

প্রত্যেকে সমকোণ।

[বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

$$\therefore \angle BAC = \angle ECD$$

[ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \text{ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের যোগফল} \times$$

সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব।

পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিকল্প প্রমাণ

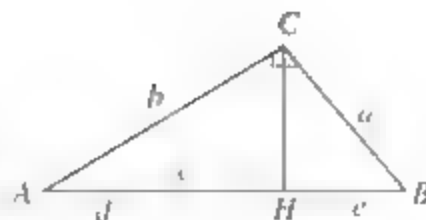
(সদৃশকোণী ত্রিভুজের সাহায্যে)

বিশেষ নির্বাচন : মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের

$\angle C = 90^\circ$ এবং অতিভুজ $AB = c$, $BC = a$,

$AC = b$ প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2$,

অর্থাৎ $c^2 = a^2 + b^2$



অঙ্কন : C বিন্দু থেকে অতিভুজ AB এর উপর লম্ব CH অঙ্কন

করি AB অতিভুজ H বিন্দুতে d ও e অংশে বিভক্ত হলো।

প্রমাণ :

ধাপ	ব্যাখ্যা
$\triangle BHC$ ও $\triangle ABC$ এ $\angle BHC = \angle ACB$ এবং $\angle CBH = \angle ABC$ (১) $\therefore \triangle CBH$ ও $\triangle ABC$ সদৃশ। $\frac{BC}{AB} = \frac{BH}{BC}$ $\frac{a}{c} = \frac{d}{a} \quad (1)$	প্রত্যেকেই সমকোণ সাধারণ কোণ
(২) অনুরূপভাবে $\triangle ACH$ ও $\triangle ABC$ সদৃশ $\frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC}$ $\frac{b}{c} = \frac{e}{b} \quad (2)$	(i) উভয় ত্রিভুজ সমকোণী (ii) $\angle A$ কোণ সাধারণ।
(৩) অনুপাত দুইটি থেকে পাই, $a^2 = c \times d$, $b^2 = c \times e$ অতএব, $a^2 + b^2 = c \times d + c \times e$ $= c(d + e) = c \times c = c^2$ $\therefore c^2 = a^2 + b^2$ [প্রমাণিত।]	$c = c + d$

পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিকল্প প্রমাণ

(বীজগণিতের সাহায্যে)

পিথাগোরাসের উপপাদ্য বীজগণিতের সাহায্যে সহজেই প্রমাণ করা যায়।

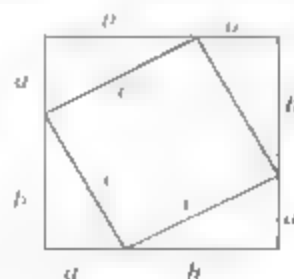
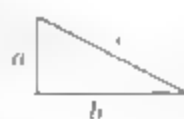
বিশেষ নির্বাচন : মনে করি, একটি সমকোণী ত্রিভুজের

অতিভুজ c এবং a , b যথাক্রমে অন্য দুই বাহু

প্রমাণ করতে হবে $c^2 = a^2 + b^2$

অঙ্কন : প্রদত্ত ত্রিভুজটির সমান করে চারটি ত্রিভুজ চিত্রে

প্রদর্শিত উপায়ে আঁকি



প্রমাণ :

ধাপ	ব্যাখ্যা
(১) অঙ্কিত বড় ক্ষেত্রটি বর্গক্ষেত্র। এর ক্ষেত্রফল $(a+b)^2$	[বাস্তবতার প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য $a+b$ এবং কোণগুলো সমকোণ]
(২) ছোট চতুর্ভুজ ক্ষেত্রটি বর্গক্ষেত্র। এর ক্ষেত্রফল c^2	[বাস্তবতার প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য c]
(৩) অঙ্কনানুসারে, বড় বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল চারটি ত্রিভুজক্ষেত্র ও ছোট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান। অর্থাৎ, $(a+b)^2 = 4 \times \frac{1}{2} \times a \times b + c^2$ বা, $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$ $\therefore c^2 = a^2 + b^2$ (প্রমাণিত)	

কাজ : ১. $(a+b)$ এর বিস্তৃতির সাহায্যে পিথাগোরাসের উপপাদ্যটি প্রমাণ কর

৯.৩ পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য

যদি কোনো ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান হয়, তবে শেখোত বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণটি সমকোণ হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $\triangle ABC$ এর $AB^2 = AC^2 + BC^2$ প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle C =$ এক সমকোণ।অঙ্কন : এমন একটি ত্রিভুজ DEF অঁকি, যেন $\angle F$ এক সমকোণ, $EF = BC$ এবং $DF = AC$ হয়।

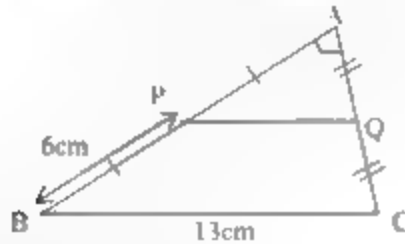
প্রমাণ :

ধাপ	ব্যাখ্যা
(১) $DE^2 = EF^2 + DF^2$ $= BC^2 + AC^2 = AB^2$ $DE = AB$	[কারণ $\triangle DEF$ এ $\angle F$ এক সমকোণ] [কল্পনা]
এখন $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এ $BC = EF$, $AC = DF$ এবং $AB = DE$ । $\triangle ABC \cong \triangle DEF \therefore \angle C = \angle F$ $\therefore \angle C =$ এক সমকোণ। [প্রমাণিত]	[বাস্তব-বাস্তব-বাস্তব সর্বসমতা] [$\because \angle F$ এক সমকোণ]

অনুশীলনী ৯

১. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত $1 : \sqrt{2}$ হলে এর বৃহত্তম কোণটির মান কত?
 - ক) 80°
 - খ) 90°
 - গ) 100°
 - ঘ) 120°
২. সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের পার্থক্য ১ হলে ক্ষুদ্রতম কোণটির মান কত?
 - ক) 40°
 - খ) 42.5°
 - গ) 47.5°
 - ঘ) 50°
৩. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ x একক এবং অপর বাহুদ্বয়ের একটি y একক হলে ঐ বাহুটির দৈর্ঘ্য কত একক?
 - ক) $x^2 + y^2$
 - খ) $\sqrt{x^2 + y^2}$
 - গ) $\sqrt{x^2 - y^2}$
 - ঘ) $x^2 - y^2$
৪. পরিমাপটির কোন পরিমাপের জন্য একটি সমকোণী ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব?
 - ক) ৪, ৪, ৫
 - খ) ৫, ১২, ১৩
 - গ) ৮, ১০, ১২
 - ঘ) ২, ৩, ৪
৫. $\triangle ABC$ এ $\angle A = 90^\circ$ সমকোণ হলে এর
 - i. অতিভুজ BC^2
 - ii. ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} AB \cdot AC$
 - iii. $BC^2 = AB^2 + AC^2$
 নিচের কোনটি সঠিক?
 - ক) i ও ii
 - খ) i ও iii
 - গ) ii ও iii
 - ঘ) i, ii ও iii
৬. সমকোণী ত্রিভুজের—
 - i. বৃহত্তম বাহুটি অতিভুজ
 - ii. ক্ষুদ্রতর বাহুদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি বৃহত্তম বাহুর বর্গের সমান
 - iii. সূক্ষ্মকোণদ্বয় পরস্পরের পূরক
 নিচের কোনটি সঠিক?
 - ক) i ও ii
 - খ) i ও iii
 - গ) ii ও iii
 - ঘ) i, ii ও iii

◆ নিচের চিত্রের আলোকে ৭-৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



চিত্রে $\angle A = 90^\circ$

৭. PQ এর দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?

- ক) ৬
- খ) ৬.৫
- গ) ৭
- ঘ) ৭.৫

ফর্ম-১৯, গণিত-অষ্টম শ্রেণি(দাখিল)

৮। ΔABC = কত বর্গ সে.মি.?

ক) 39

খ) 32.5

গ) 30

ঘ) 15

৯। ΔAPQ এর পরিসীমা কত সে.মি.?

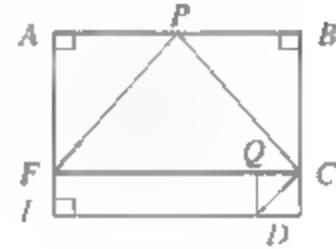
ক) 15

খ) 12.5

গ) 10

ঘ) 7.5

- ◆ $ABCFDE$ বহুভুজে $AE \parallel BC$, $CF \perp AE$ এবং
 $DQ \perp CF$, $ED = 10$ মি.মি., $EF = 2$ মি.মি.,
 $BC = 8$ মি.মি. $AB = 12$ মি.মি.



উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের (১০-১৩) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও

১০। $ABCF$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল কত বর্গ মি.মি.?

ক. 64

খ. 96

গ. 100

ঘ. 144

১১। নিচের কোনটি FPC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে?

ক. 32 বর্গ মি.মি.

খ. 48 বর্গ মি.মি.

গ. 72 বর্গ মি.মি.

ঘ. 60 বর্গ মি.মি.

১২। CD এর দৈর্ঘ্য নিচের কোনটিতে প্রকাশ পায়?

ক. $2\sqrt{2}$ মি.মি.

খ. 4 মি.মি.

গ. $4\sqrt{2}$ মি.মি.

ঘ. 8 মি.মি.

১৩। নিচের কোনটিতে $\Delta P(O, M)(C)$ এর ক্ষেত্রফলের অন্তর নির্দেশ করে?

ক. 46 বর্গ মি.মি.

খ. 48 বর্গ মি.মি.

গ. 50 বর্গ মি.মি.

ঘ. 52 বর্গ মি.মি.

১৪। ABC একটি সমকোণ ত্রিভুজ। AD , BC -এর উপর লম্ব।

প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 4AD^2$

১৫। $ABCD$ চতুর্ভুজের কর্ন দুইটি পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে

প্রমাণ কর যে, $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$

১৬। ABC ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ এবং CD একটি মধ্যমা।

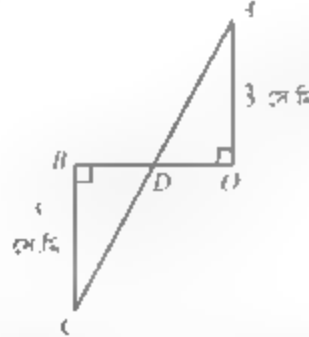
প্রমাণ কর যে, $BC^2 = CD^2 + 3AD^2$

১৭। ABC ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ BP ও CQ দুইটি মধ্যমা।

প্রমাণ কর যে, $5BC^2 = 4(BP^2 + CQ^2)$

- ১৮ প্রমাণ কর যে, কোনো বর্গক্ষেত্রের কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ঐ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

১৯

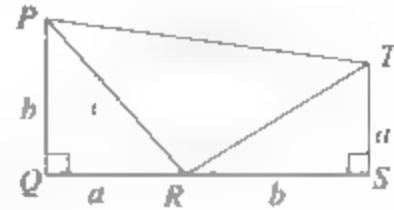


চিত্রে $OB = 4$ সে.মি. হলে BD এবং AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

- ২০ প্রমাণ কর যে, কোনো বর্গক্ষেত্রের কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক
- ২১ $\triangle ABC$ ত্রিভুজের $\angle C$ - এক সমকোণ, D AC এর উপরস্থ একটি বিন্দু।
প্রমাণ কর যে, $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$
- ২২ $\triangle ABC$ ত্রিভুজের $\angle C$ - এক সমকোণ D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু হলে,
প্রমাণ কর যে, $DE^2 = CE^2 + BD^2$
- ২৩ $\triangle ABC$ এ BC এর উপর লম্ব AD এবং $AB > AC$
প্রমাণ কর যে, $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$
- ২৪ $\triangle ABC$ এ BC এর উপর AD লম্ব এবং AD এর উপর P যেকোনো বিন্দু ও $AB > AC$
প্রমাণ কর যে, $PB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2$

২৫।

- ক. $PQST$ কী ধরনের চতুর্ভুজ? স্বপক্ষে যুক্তি দাও।
- খ. দেখাও যে, $\triangle PRT$ সমকোণী।
- গ. প্রমাণ কর যে, $PR^2 = PQ^2 + QR^2$

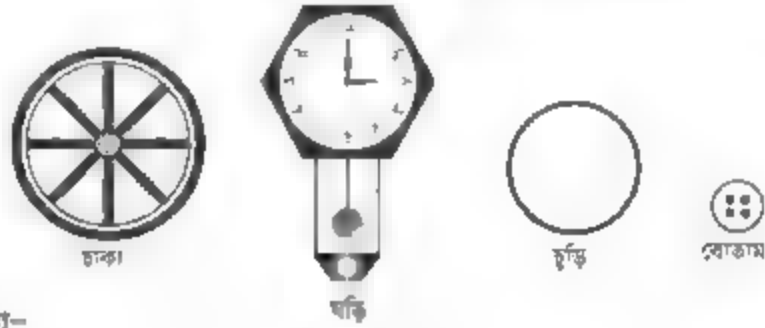


- ২৬ $\triangle PQR$ এ $\angle P = 90^\circ$ । PQ এবং PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে N ও M
ক) ত্রিভুজটি আঁক।
- খ) চিত্র থেকে প্রমাণ কর যে, $PR^2 + PQ^2 = QR^2$ ।
- গ) প্রমাণ কর $SRQ^2 = 4(RN^2 + QM^2)$

দশম অধ্যায়

বৃত্ত

প্রতিদিন আমরা কিছু জিনিস দেখি ও ব্যবহার করি যা বৃত্তাকার যেমন, ঘড়ির চাকা, চুড়ি, ঘড়ি, বোতাম, খালা, মুদ্রা ইত্যাদি। আমরা দেখি যে, ঘড়ির সেকেন্ডের কাঁটার অগ্রভাগ গোলাকার পথে ঘুরতে থাকে। সেকেন্ডের কাঁটার অগ্রভাগ যে পথ চিহ্নিত করে এতে বৃত্ত বলে। বৃত্তাকার বস্তুকে আমরা নানাভাবে ব্যবহার করি।



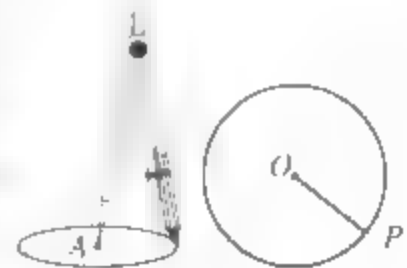
অধ্যায় শেষে শিখাবীরা—

- বৃত্তের ধারণা লাভ করবে।
- পাই (π) এর ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ও পরিসীমা নির্ণয় করে সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- বৃত্ত সংক্রান্ত উৎপাদ্য প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান করতে পারবে এবং পরিমাপক যন্ত্র ব্যবহার করে বৃত্তাকার ক্ষেত্রের পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে।
- চতুর্ভুজ ও বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সাহায্যে বেলানের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে।

১০.১ বৃত্ত (Circle)

এক টাকার একটি কাংলাদেশি মুদ্রা নিয়ে সাদা কাগজের উপর বেখে মুদ্রাটির মাঝ বরাবর বা হাভেল ডর্জিনী দিয়ে চেপে ধরি। এই অবস্থায় ডান হাতে সরু পেন্সিল নিয়ে মুদ্রাটির পা ঘেঁষে চারদিকে ঘুরিয়ে আনি। মুদ্রাটি সরিয়ে নিলে কাগজে একটি গোলাকার অবয়ব বস্তুস্বরূপ দেখা যাবে। এটি একটি বৃত্ত।

নিখুঁতভাবে বৃত্ত আঁকার জন্য পেন্সিল কম্পাস ব্যবহার করা হয়। কম্পাসের কাঁটাটি কাগজের উপর চেপে ধরে অপর প্রান্তে সংযুক্ত পেন্সিলটি কাগজের উপর চারদিকে ঘুরিয়ে আনলেই একটি বৃত্ত আঁকা হয়ে থাকে, যেমনটি চিত্রে দেখানো হয়েছে। তাহলে বৃত্ত আঁকার সময় নির্দিষ্ট একটি বিন্দু থেকে সমদূরত্বী বিন্দুগুলোকে আঁকা হয়। এই নির্দিষ্ট বিন্দুটি বৃত্তের কেন্দ্র। কেন্দ্র থেকে সমদূরত্বী যেকোনো বিন্দুর দূরত্বকে বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলা হয়।

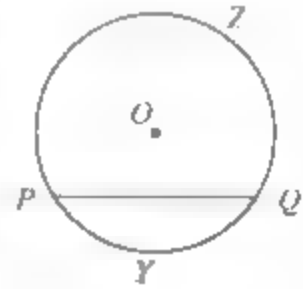


কাজ :

১ পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে O কেন্দ্রবিশিষ্ট ৪ সে.মি ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত আঁক বৃত্তের উপরে বিভিন্ন জায়গায় কয়েকটি বিন্দু A, B, C, D নিয়ে কেন্দ্র থেকে বিন্দুগুলো পর্যন্ত রেখাংশগুলো আঁক রেখাংশগুলোর দৈর্ঘ্য পরিমাপ কর। কী লক্ষ কর?

১০.২ বৃত্তের জ্যা ও চাপ (Chord and Arc of a Circle)

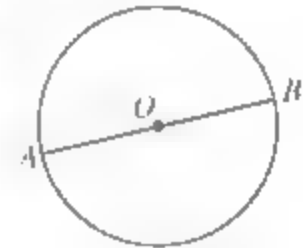
পাশের চিত্রে, একটি বৃত্ত দেখানো হয়েছে, যার কেন্দ্র O । বৃত্তের উপর যেকোনো বিন্দু P O নিয়ে এদের সংযোজক রেখাংশ PO টানি PQ রেখাংশ বৃত্তটির একটি জ্যা। জ্যা দ্বারা বৃত্তটি দুইটি অংশে বিভক্ত হয়েছে। জ্যাটির দুই পাশের দুই অংশে বৃত্তটির উপর দুইটি বিন্দু Y ও Z নিলে এই দুইটি অংশের নাম PYQ ও PZQ । জ্যা দ্বারা বিভক্ত বৃত্তের প্রত্যেক অংশকে বৃত্তচাপ, বা সংক্ষেপে চাপ বলে। চিত্রে, PQ জ্যা দ্বারা সৃষ্ট চাপ দুইটি হচ্ছে PYQ ও PZQ ।



বৃত্তের যেকোনো দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ বৃত্তটির একটি জ্যা। প্রত্যেক জ্যা বৃত্তকে দুইটি চাপে বিভক্ত করে।

১০.৩ ব্যাস ও পরিধি (Diameter and Circumference)

পাশের চিত্রে, AB এমন একটি জ্যা, যা বৃত্তের কেন্দ্র O দিয়ে গেছে। এবশ ক্ষেত্রে আমরা বলি, জ্যাটি বৃত্তের একটি ব্যাস। ব্যাসের দৈর্ঘ্যকেও ব্যাস বলা হয়। AB ব্যাসটি দ্বারা সৃষ্ট চাপ দুইটি সমান। এর প্রত্যেক একটি অর্ধবৃত্ত। বৃত্তের কেন্দ্রগামী যেকোনো জ্যা, বৃত্তের একটি ব্যাস। ব্যাস বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা। বৃত্তের প্রত্যেক ব্যাস বৃত্তকে দুইটি অর্ধবৃত্তে বিভক্ত করে। ব্যাসের অর্ধেক দৈর্ঘ্যকে ব্যাসার্ধ বলে। ব্যাস ব্যাসার্ধের দ্বিগুন।



বৃত্তের সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্যকে পরিধি বলে। অর্থাৎ বৃত্তস্থিত যেকোনো বিন্দু P

থেকে বৃত্ত বরাবর ঘুরে পুনরায় P বিন্দু পর্যন্ত পথের দূরত্বই পরিধি।

বৃত্ত সরলরেখা নয় বলে ক্যালকুলেটর সাহায্যে বৃত্তের পরিধিও দৈর্ঘ্য পরিমাপ করা যায় না। পরিধি মাপার একটি সহজ উপায় আছে। ছবি আঁকার কাগজে একটি বৃত্ত এঁকে বৃত্ত বরাবর কেটে নাও পরিধির উপর একটি বিন্দু চিহ্নিত কর। এবার কাগজে একটি রেখাংশ আঁক এবং বৃত্তাকার কাঁড়টি কাগজের উপর খাড়াভাবে রাখ যেন পরিধির চিহ্নিত বিন্দুটি রেখাংশের এক প্রান্তের সাথে মিলে যায়। এখন কাঁড়টি রেখাংশ বরাবর গড়িয়ে নাও যতক্ষণ না পরিধির চিহ্নিত বিন্দুটি রেখাংশকে পুনরায় স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দুটি চিহ্নিত কর এবং রেখাংশের প্রান্তবিন্দু থেকে এর দৈর্ঘ্য পরিমাপ কর। এই পরিমাপই পরিধির দৈর্ঘ্য। লক্ষ কর, ছোট বৃত্তের ব্যাস ছোট, পরিধিও ছোট, অন্যদিকে বড় বৃত্তের ব্যাস বড়, পরিধিও বড়।

১০.৪ বৃত্ত সম্পর্কিত উপপাদ্য (Circle related theorems)

কাজ .

১ ট্রেসিং কাগজে যেকোনো ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত ছাঁক O বৃত্তের কেন্দ্র নাও বানান জি একটি জ্যা AB ছাঁক O বিন্দুর মধ্য দিগে কাগজটি এমনভাবে ঢাক কর ফেল, O বিন্দু-এর প্রক্ষেপবিন্দু হয় M ও B মিলে মধ্য-ভাজ বরাবর রেখাংশ OM আঁক যা জ্যাকে M বিন্দুতে ছেদ করে। তা হলে M জ্যা-এর মধ্যবিন্দু, OM ও OMB কোণদ্বয় পরিমাপ কর। এরা প্রত্যেকে কি এক সমকোণের সমান?

উপপাদ্য ১।

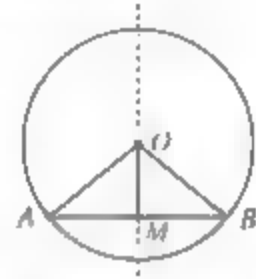
বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা-এর উপর লম্ব।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB ব্যাস নয় এমন একটি জ্যা

এবং M ঐ জ্যা-এর মধ্যবিন্দু। O, M যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, OM রেখাংশ AB জ্যা-এর উপর লম্ব।

অঙ্কন। O, A এবং O, B যোগ করি।



প্রমাণ।

খাপ

(১) $\triangle OAM$ এবং $\triangle OBM$ এ

$$AM = BM$$

$$OA = OB$$

এবং $OM = OM$

সুতরাং $\triangle OAM \cong \triangle OBM$

$$\angle OMA = \angle OMB$$

(২) যেহেতু কোণদ্বয় বৈধিক যুগল কোণ এবং এদের পরিমাপ সমান,

সুতরাং, $\angle OMA = \angle OMB = ১$ সমকোণ।

অতএব, $OM \perp AB$ (প্রমাণিত)

যথার্থতা।

[M, AB এর মধ্যবিন্দু,

[উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

[সাধারণ বাহু]

[বাহু-বাহু-বাহু উপপাদ্য]

কাজ - প্রমাণ কর যে বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন অন্য কোনো জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [ইঙ্গিত: সমকোণী ত্রিভুজের সর্বসমতা ব্যবহার কর।]

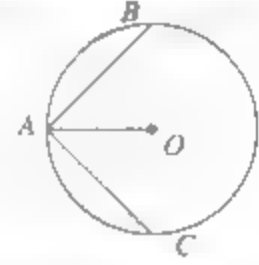
অনুসিদ্ধান্ত ১ বৃত্তের যেকোনো জ্যা এর লম্বদ্বয় স্থিতিগত কেন্দ্রগামী।

অনুসিদ্ধান্ত ২, যেকোনো সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুইবার অধিক বিন্দুতে ছেদ করতে পারে না।

অনুশীলনী ১০.১

- প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তাদের ছেদবিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হবে।
- প্রমাণ কর যে, দুইটি সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রগামী এবং জ্যাখণ্ডের উপর লম্ব।
- কোনো বৃত্তের AB ও AC জ্যা দুইটি A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, $AB = AC$ ।

- চিত্রে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং জ্যা $AB =$ জ্যা AC ।
প্রমাণ কর যে, $\angle BAO = \angle CAO$ ।

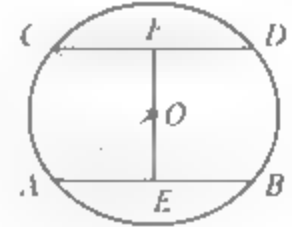


- কোনো বৃত্ত একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো দিয়ে যায়। দেখাও যে, বৃত্তটির কেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু।
- দুইটি সমকেন্দ্রিক বৃত্তের একটির AB জ্যা অপর বৃত্তকে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AC = BD$ ।

উপপাদ্য ২।

বৃত্তের সকল সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।

মনে করি, (O) বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ও CD বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা।
প্রমাণ করতে হবে যে, (O) থেকে AB এবং CD জ্যাখণ্ড সমদূরবর্তী।



অঙ্কন : O থেকে AB এবং CD জ্যা-এর উপর যথাক্রমে

OE এবং OF লম্ব রেখাংশ আঁকি। O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ।

ধাপ	যথার্থতা
(১) $OE \perp AB$ ও $OF \perp CD$ সুতরাং, $AE = BE$ এবং $CF = DF$ $\therefore AE = \frac{1}{2} AB$ এবং $CF = \frac{1}{2} CD$, কেন্দ্র থেকে বাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [কল্পনা]
(২) কিন্তু, $AB = CD$ বা $\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} CD$ $AE = CF$	
(৩) এখন $\triangle OAE$ এবং $\triangle OCF$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে	

অতিভুজ $OA =$ অতিভুজ OC এবং

$$AE = CF$$

$$\therefore \triangle OAE \cong \triangle OCF$$

$$\therefore OE = OF$$

[উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

[ধাপ ২]

[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু
সর্বসমতা উপপাদ্য]

(৪) কিন্তু OE এবং OF কেন্দ্র O থেকে যথাক্রমে

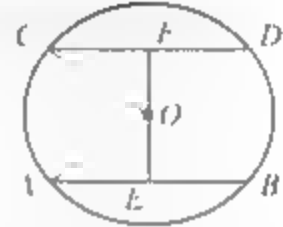
AB জ্যা এবং CD জ্যা এর দূরত্ব :

সুতরাং, AB এবং CD জ্যার বৃত্তের কেন্দ্র থেকে
সমদূরবর্তী। (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ৩

বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী সকল জ্যা পরস্পর সমান।

মনে করি, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ও CD দুইটি জ্যা। O থেকে
 AB ও CD এর উপর যথাক্রমে OE ও OF লম্ব। তাহলে OE ও OF
কেন্দ্র থেকে যথাক্রমে AB ও CD জ্যা এর দূরত্ব নির্দেশ করে।
 $OE = OF$ হলে প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = CD$



অঙ্কন : O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু $OE \perp AB$ এবং $OF \perp CD$. সুতরাং, $\angle OEA = \angle OFC =$ এক সমকোণ	[সমকোণ]
(২) এখন, $\triangle OAE$ এবং $\triangle OCF$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে	
অতিভুজ $OA =$ অতিভুজ OC এবং $OE = OF$ $\therefore \triangle OAE \cong \triangle OCF$ $AE = CF$	[উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] [কল্পনা, [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]
(৩) $AE = \frac{1}{2} AB$ এবং $CF = \frac{1}{2} CD$	
(৪) সুতরাং $\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} CD$	[কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
অর্থাৎ, $AB = CD$	

উদাহরণ ৪। প্রমাণ কর যে, বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট $ABDC$ একটি বৃত্ত। AB ব্যাস এবং (C) বান ভিন্ন যেকোনো একটি জ্যা প্রমাণ করতে হবে যে, $AB > CD$

অঙ্কন: O, C এবং O, D যোগ করি।

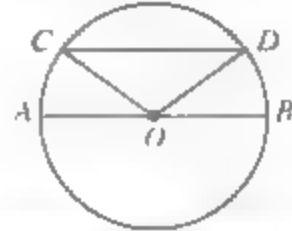
প্রমাণ: $OA = OB = OC = OD$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

এখন, ΔOCD এ

$$OC + OD > CD$$

বা $OA + OB > CD$

অর্থাৎ, $AB > CD$



[ত্রিভুজের যে কোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।]

অনুশীলনী ১০.২

- ১। বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা পরস্পরকে ছেদ করলে দেখাও যে, এদের একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান।
- ২। প্রমাণ কর যে, বৃত্তের সমান জ্যা-এর মধ্যবিন্দুগুলো সমবৃত্ত।
- ৩। দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে এর নিপকীত দিকে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে এরা সমান্তরাল হয়।
- ৪। দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে এর নিপকীত দিকে দুইটি সমান্তরাল জ্যা আঁকলে এরা সমান হয়।
- ৫। দেখাও যে, বৃত্তের দুইটি জ্যা এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যা-টি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।
- ৬। O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে PQ এবং RS দু'টি সমান জ্যা এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N ।
ক) $3/4$ বর্গ সে.মি. ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।
খ) প্রমাণ কর যে, $OM = ON$ ।
গ) PQ এবং RS জ্যাদ্বয় বৃত্তের অভ্যন্তরে পরস্পরকে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান।

১০.৫ বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত π (Ratio of Circumference and Diameter of a Circle)

বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের মধ্যে কোনো সম্পর্ক রয়েছে কি না বের করার জন্য দলগতভাবে নিচের কাজটি কর:

কাজ:

- ১। আমরা প্রত্যেকে পছন্দমতো তিন তিন ব্যাসার্ধের তিনটি করে বৃত্ত আঁক এবং ব্যাসার্ধ ও পরিধি পরিমাপ করে নিচের সারণিটি পূরণ কর। পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত কি সর্বত্র সমান মনে হয়?

বৃত্ত	ব্যাসার্ধ	পরিধি	ব্যাস	পরিধি/ব্যাস
১	৩.৫ সে.মি.	২২ সে.মি.	৭.০ সে.মি.	$22/7 = 3.142$

ফর্ম-২০, পবিত্র অষ্টম শ্রেণি (দাখিল)

কোনো বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত ধ্রুবক। একে গ্রিক অক্ষর π (পাই) দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

অর্থাৎ, বৃত্তের পরিধি c ও ব্যাস d হলে অনুপাত $\frac{c}{d} = \pi$ বা $c = \pi d$ ।

আবার বৃত্তের ব্যাস ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ : অর্থাৎ, $d = 2r$ অতএব, $c = 2\pi r$ ।

প্রাচীন কাল থেকে গণিতবিদগণ π এর আসন্ন মান নির্ণয়ের চেষ্টা করেছেন। ভারতীয় গণিতবিদ আর্যভট্ট

(৪৭৬ - ৫৫০ খ্রিস্টাব্দ) π এর আসন্ন মান নির্ণয় করেছেন $\frac{62832}{20000}$ যা প্রায় ৩।৫৬৬।

ফ্রাঁসিস বাস্কোজান (১৮৮৭-১৯২০) π এর আসন্ন মান বের করেছেন যা দশমিকের পর মিলিয়ন ঘর পর্যন্ত সঠিক প্রকৃৎপক্ষে, π একটি অদ্বন্দ্ব সংখ্যা। আমাদের দৈনন্দিন হিসাবের প্রয়োজনে ধ্রুবক π

এর আসন্ন মান $\frac{22}{7}$ ধরা হয়।

উদাহরণ ১। ১০ সে.মি ব্যাসের বৃত্তের পরিধি কত? ($\pi \approx \frac{22}{7}$ ধরি)

সমাধান : বৃত্তের ব্যাস $d = 10$ সে.মি

বৃত্তের পরিধি $= \pi d$

$$\approx 3.14 \times 10 \text{ সে.মি.} = 31.4 \text{ সে.মি.}$$

অতএব, ১০ সে.মি. ব্যাসের বৃত্তের পরিধি ৩১.৪ সে.মি. (প্রায়)।

উদাহরণ ২। ১৪ সে.মি ব্যাসার্ধের বৃত্তের পরিধি কত? ($\pi \approx \frac{22}{7}$ ধরি)

সমাধান : বৃত্তের ব্যাসার্ধ (r) = ১৪ সে.মি

বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$

$$\approx 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \text{ সে.মি.} = 88 \text{ সে.মি.}$$

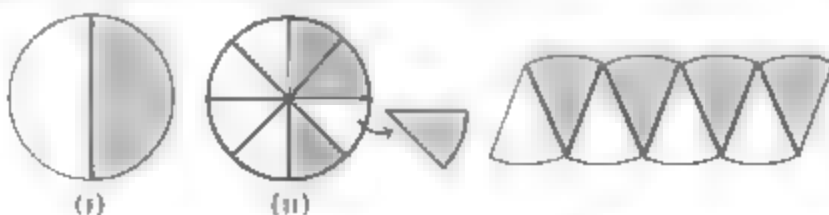
অতএব, ১৪ সে.মি. ব্যাসার্ধের বৃত্তের পরিধি ৮৮ সে.মি. (প্রায়)।

১০.৬ বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

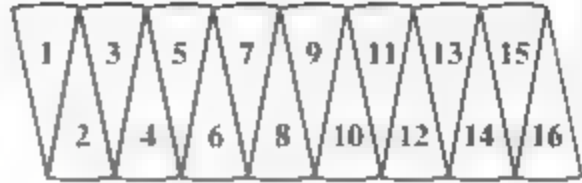
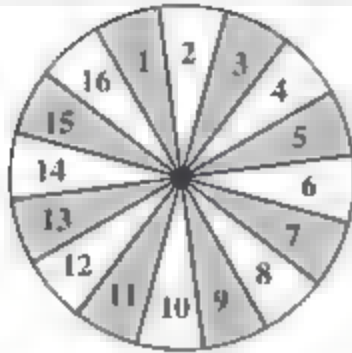
বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ সমতলীয় ক্ষেত্র বৃত্তক্ষেত্র। বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বের করার জন্য নিচের কাজটি করি।

কাজ :

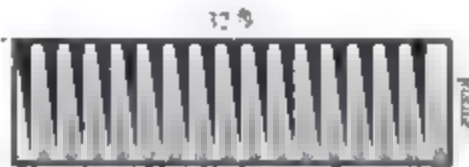
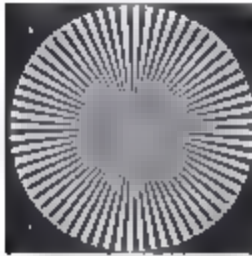
(ক) কাগজে চিত্রের ন্যায় একটি বৃত্ত ট্রাক এর অর্ধাংশ বা অর্ধ বৃত্তের বৃত্তটি মাঝ বরাবর পর্যায়ক্রমে তিন বার ভাঁজ কর এবং ভাঁজ লাইনকে কেন্দ্র নাও বৃত্তটি সমান অংশে বিভক্ত হলো। বৃত্তের চুকগুলোকে চিত্রের ন্যায় সামান্যে কী পাওয়া যায় ? একটি সামান্তরিকের মতো নয় কি ?



(খ) বৃত্তটি সমান ছোঁলেটি অংশে বিভক্ত করে একইভাবে সাজাও। সামান্যের ফলে কী পেয়েছো ?



গ) বৃত্তটি সমান চৌমুটি অংশে বিভক্ত করে একইভাবে সাজ ও সাজানোর ফলে কী লেগেছে? প্রায় একটি আয়তক্ষেত্র কি?



ঘ) আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত? ক্ষেত্রফল কত?

$$\begin{aligned} \text{বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} &= \text{আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল} = \text{দৈর্ঘ্য} \times \text{প্রস্থ} \\ &= \text{পরিধির অর্ধেক} \times \text{ব্যাসার্ধ} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2 \end{aligned}$$

∴ বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = πr^2 বর্গ একক

কাজ :

১. (ক) প্রায় কাগজে ১ সে.মি. ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কন করে ক্ষুদ্রতম বর্গচলো নথনা করে বৃত্তক্ষেত্রটির আনুমানিক ক্ষেত্রফল বের কর।
- (খ) একই বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর। নির্ণীত ক্ষেত্রফল ও আনুমানিক ক্ষেত্রফলের পার্থক্য বের কর।

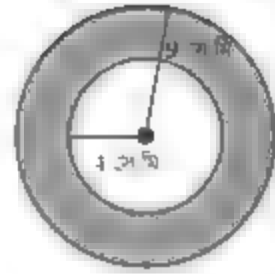
উদাহরণ ৩। ৭.৫ মি. ব্যাসের বৃত্তাকার একটি বাগানের ক্ষেত্রফল কত?

সমাধান : বৃত্তাকার বাগানের ব্যাস, $d = 9.8$ মি.

$$\text{বৃত্তাকার বাগানের ব্যাসার্ধ } r = \frac{9.8}{2} \text{ মি.} = 4.9 \text{ মি.}$$

$$\begin{aligned} \text{বৃত্তাকার বাগানের ক্ষেত্রফল} &= \pi r^2 \\ &\approx 3.14 \times 4.9^2 \text{ বর্গমিটার} = 75.39 \text{ বর্গমিটার (প্রায়)} \end{aligned}$$

উদাহরণ ৪। পাশের চিত্রে দুইটি সমকেন্দ্রিক বৃত্ত প্রদর্শিত হয়েছে। বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধ যথাক্রমে ৭ সে.মি ও ৪ সে.মি। বৃত্তদ্বয়ের পরিধির মধ্যবর্তী এলাকার ক্ষেত্রফল কত?



সমাধান :

বৃহত্তর বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 7$ সে.মি.

বৃহত্তর বৃত্তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ সেন্টিমিটার

$$\approx 3.14 \times 7^2 \text{ বর্গ সেন্টিমিটার} = 254.34 \text{ বর্গ সেন্টিমিটার}$$

ক্ষুদ্রতর বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 4$ সে.মি.

ক্ষুদ্রতর বৃত্তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ সেন্টিমিটার

$$\approx 3.14 \times 4^2 \text{ বর্গ সেন্টিমিটার} = 50.24 \text{ বর্গ সেন্টিমিটার (প্রায়)}$$

বৃত্তদ্বয়ের মধ্যবর্তী এলাকার ক্ষেত্রফল $= (254.34 - 50.24)$ বর্গ সেন্টিমিটার (প্রায়)

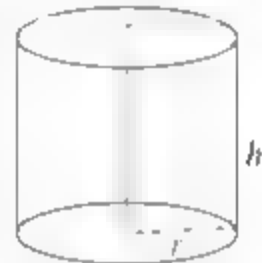
$$= 204.10 \text{ বর্গ সেন্টিমিটার (প্রায়)}$$

১০.৭ বেলন বা সিলিন্ডার (cylinder)

একটি আয়তাকার (চিত্র-১) বা বর্গাকার ক্ষেত্রকে তার যেকোনো এক বাহুকে স্থির রেখে ক্ষেত্রটিকে সম্পূর্ণ একবার ঘোরানো হলে একটি ঘনবস্তুর (চিত্র-২) উৎপত্তি হয়। এরূপ ঘনবস্তুকে বলা হয় সমবৃত্তভূমিক বেলন বা সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার (Right circular cylinder) স্থির রেখাটিকে বেলনটির অক্ষ ও এর বিপরীত বাহুকে বেলনটির সৃজক রেখা বলা হয়। এটি বেলনটির উচ্চতা। অপর বাহুটির দৈর্ঘ্য হচ্ছে বেলনটির ব্যাসার্ধ।



চিত্র-১



চিত্র-২

বেলনের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় : মনে করি একটি সমবৃত্তভূমিক বেলনের ব্যাসার্ধ r এবং উচ্চতা h । বেলনটিকে (যেমন, টিনের

একটি ফাঁপা কৌটি) ছাে প্রান্তগুলোর মাঝে লম্ব বরাবর কেটে সমতল আকারের করা হলে হবে একটি আয়তক্ষেত্র। যার প্রান্তদ্বয় হিসেবে যে দুই বাহু পাওয়া যাবে তাদের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য হবে $2\pi r$ (বৃত্তের পরিধি) এবং অপর বাহু হবে বেলনটির উচ্চতা।

অতএব, সমবৃত্তভূমিকে বেলনটির সমগ্র পৃষ্ঠের বা তলের

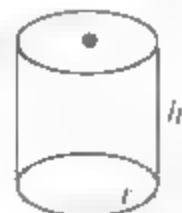
$$\begin{aligned} \text{ক্ষেত্রফল} &= \text{প্রান্ত তলদ্বয়ের ক্ষেত্রফল} + \text{বক্রতলের (যা একটি আয়তক্ষেত্র) ক্ষেত্রফল} \\ &= 2 \times \pi r^2 + 2 \pi r \times h \\ &= 2 \pi r^2 + 2 \pi r h \\ &= 2 \pi r (r + h) \text{ বর্গ একক} \end{aligned}$$

উদাহরণ ৫। একটি সমবৃত্তভূমিক বেলনের ব্যাসার্ধ ৪.৫ সে.মি. ও উচ্চতা ৬ সে.মি। বেলনটির বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ($\pi = 3.14$)।

সমাধান প্রদত্ত সমবৃত্তভূমিক বেলনটির ব্যাসার্ধ $r = 4.5$ সে.মি ও উচ্চতা $h = 6$ সে.মি,
 \therefore বেলনটির বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল

$$= 2\pi r h = 2 \times 3.14 \times 4.5 \times 6 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 6.28 \times 27 \text{ বর্গ সে.মি} = 169.56 \text{ বর্গ সে.মি}$$



অনুশীলনী ১০.৩

১। কোন সমতলে—

- i. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে অসংখ্য বৃত্ত আঁকা যায়
 ii. সমরেখ নয় এমন তিনটি বিন্দু দিয়ে কেবল একটিই বৃত্ত আঁকা যায়
 iii. একটি সরলরেখা কোন বৃত্তকে দুইটির বেশি বিন্দুতে ছেদ করতে পারে
 নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

২। $2r$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের—

- i. পরিধি $4\pi r$ একক
 ii. ব্যাস $4r$ একক
 iii. ক্ষেত্রফল $= 2\pi r^2$ বর্গ একক
 নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

৩। ১ সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ৬ সে.মি. দৈর্ঘ্যের জ্যা এর দূরত্ব কত সে.মি.?

ক) ৬ খ) ৩ গ) ২ ঘ) ০

৪। একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল—

ক) ১ বর্গ একক খ) ২ বর্গ একক গ) π বর্গ একক ঘ) π^2 বর্গ একক

৫। কোন বৃত্তের পরিধি ২৩ সে.মি. হলে এর ব্যাসার্ধ কত?

ক) ২.৩১ সে.মি. (প্রায়) খ) ৩.৬৬ সে.মি. (প্রায়) গ) ৭.৩২ সে.মি. (প্রায়) ঘ) ১১.৫ সে.মি. (প্রায়)

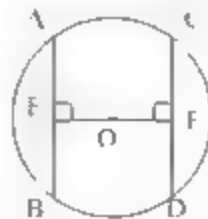
৬। ১ সে.মি. এবং ২ সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট এক কেন্দ্রিক দুইটি বৃত্তকে কেন্দ্রের পরিধি ধরের মাঝের অংশের ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ক) π খ) 3π গ) 4π ঘ) 5π

৭। কোন গাড়ির চাকার ব্যাস ১৪ সে.মি. হলে দুই বার ঘুরে চাকাটি কত সে.মি. (প্রায়) দূরত্ব অতিক্রম করবে?

ক) ৫৭.৬৭ সে.মি. খ) ৭৬ সে.মি. গ) ১১৭.৩৪ সে.মি. ঘ) ২৩৪.৭৬ সে.মি.

◆ চিত্রের আলোকে ৮, ৯ ও ১০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র। $BE = 4$ cm

৮। $OE = OF$ হলে, $CD =$ কত সে.মি.?

ক) 3 cm

খ) 4cm

গ) 6cm

ঘ) 8cm

৯। $AB = CD$ এবং $OE = 3$ সে.মি. হলে, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত সে.মি.?

ক) 3

খ) 4

গ) 5

ঘ) 6

১০। $AB > CD$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) $CE < BE$ খ) $OE > OF$ গ) $OE < OF$ ঘ) $OE = OF$

১১। পঞ্চদশমতো কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নিয়ে পেন্সিল কম্পাস ব্যবহার করে একটি বৃত্ত খাঁক বৃত্তের উপর কয়েকটি ব্যাসার্ধ খাঁক মেপে দেখ সবগুলো ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান কিনা।

১২। নিম্নবর্ণিত ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের পরিধি নির্ণয় কর:

(ক) 10 সে.মি.

(খ) 14 সে.মি.

(গ) 21 সে.মি

১৩। নিম্নবর্ণিত বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর:

(ক) ব্যাসার্ধ = 1.2 সে.মি.

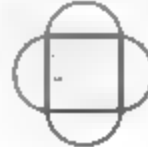
(খ) ব্যাস = 3.4 সে.মি

(গ) ব্যাসার্ধ = 2.1 সে.মি

১৪। একটি বৃত্তাকার শিটের পরিধি 15.4 সে.মি. হলে, এর ব্যাসার্ধ কত? শিটের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১৫। একজন মাঝী 21 মি. ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার বাগানের চারদিকে সুইনার ঘুরিয়ে দড়ির বেড়া দিতে চায় প্রতি মিটার দড়ির মূল্য 18 টাকা হলে, তাকে কত টাকার দড়ি কিনতে হবে?

১৬। পাশের চিত্রের ক্ষেত্রটির পরিসীমা নির্ণয় কর



১৭। 14 সে.মি. ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার বোর্ড থেকে 1.5 সে.মি. ব্যাসার্ধের দুইটি বৃত্তাকার অংশ এবং 3 সে.মি. দৈর্ঘ্য ও 1 সে.মি. প্রস্থের একটি আয়তাকার অংশ কেটে নেওয়া হলো। বোর্ডের বাকি অংশের ক্ষেত্রফল বের কর।



১৮। 5.5 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি সমবৃত্তভূমিক বেলনের উচ্চতা 8 সে.মি. বেলনটির সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ($\pi = 3.14$)।

একাদশ অধ্যায় তথ্য ও উপাত্ত

জ্ঞান বিজ্ঞানের ব্যাপক প্রসার ও দ্রুত উন্নয়নে তথ্য ও উপাত্ত গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা ও অবদান রেখে চলেছে। তথ্য ও উপাত্তের ওপর ভিত্তি করে পরিচালিত হয় গবেষণা এবং অব্যাহত গবেষণার ফল হচ্ছে জ্ঞান-বিজ্ঞানের অত্যাবশ্যীয় উন্নয়ন। তথ্য ও উপাত্ত উপস্থাপনে ব্যাপকতা লাভ করেছে সংখ্যার ব্যবহার। আর সংখ্যাসূচক তথ্য হচ্ছে পরিসংখ্যান। তাই পরিসংখ্যানের মৌলিক ধারণা ও সংশ্লিষ্ট বিষয়বস্তুসমূহ জ্ঞান আবেশের পূর্ববর্তী শ্রেণিতে পরিসংখ্যানের মৌলিক বিষয়গুলো ক্রমান্বয়ে উপস্থাপন করা হয়েছে। এরই ধারাবাহিকতায় এ অধ্যায়ে কেন্দ্রীয় প্রবণতা, এর পরিমাপক গড়, মধ্যক ও প্রচুরক সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা করা হলো।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- কেন্দ্রীয় প্রবণতা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- গাণিতিক সূত্রের সাহায্যে গড়, মধ্যক ও প্রচুরক নির্ণয় করে সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- আয়তক্ষেত্র ও পাইচিত্র অঙ্কন করতে পারবে।

১১.১ তথ্য ও উপাত্ত (Information and Data)

আগের শ্রেণিতে আমরা এ সম্বন্ধে মৌলিক ধারণা লাভ করেছি এবং নিশ্চিত জেনেছি। এখানে আমরা স্বল্প পরিসরে এ সম্বন্ধে আলোচনা করব। আমরা জানি সংখ্যাভিত্তিক কোনো তথ্য বা ঘটনা হচ্ছে একটি পরিসংখ্যাম। আর তথ্য বা ঘটনা-নির্দেশক সংখ্যাগুলো হচ্ছে পরিসংখ্যানের উপাত্ত। দ্বারা যাক, ৫০ নম্বরের মধ্যে অন্তর্ভুক্ত কোনো প্রতিযোগিতামূলক পরীক্ষায় অংশগ্রহণকারী ২০ জন প্রার্থীর গণিতের প্রাপ্ত নম্বর হলো ২৫, ৪৫, ৪০, ২০, ৩৫, ৩০, ৩৫, ৩০, ৪০, ৪১, ৪৬, ২০, ২৫, ৩০, ৪৫, ৪২, ৪৫, ৪৭, ৫০, ৩০। এখানে, গণিত প্রাপ্ত সংখ্যা-নির্দেশিত নম্বরসমূহ একটি পরিসংখ্যান। আর নম্বরগুলো হলো এ পরিসংখ্যানের উপাত্ত। এ উপাত্তগুলো সহজে সরাসরি উৎস থেকে সংগ্রহ করা যায়। সরাসরি উৎস থেকে সংগৃহীত উপাত্তের নির্ভরযোগ্যতা অনেক বেশি। সরাসরি উৎস থেকে সংগৃহীত হয় এমন উপাত্ত হলো প্রাথমিক উপাত্ত। মাধ্যমিক উপাত্ত পরোক্ষ উৎস থেকে সংগৃহীত হয়। বিধায় এর নির্ভরযোগ্যতা অনেক কম। উপাত্তে বর্ণিত উপাত্তের নম্বরগুলো এলোমেলোভাবে আছে। নম্বরগুলো মানের কোনো ক্রমে সাজানো নেই। এ ধরনের উপাত্ত হলো অবিন্যস্ত উপাত্ত। এ উপাত্তের নম্বরগুলো মানের যেকোনো ক্রমে সাজালে হবে বিন্যস্ত উপাত্ত। নম্বরগুলো মানের উর্ধ্বক্রমে সাজালে হয় ২০, ২০, ২৫, ২৫, ৩০, ৩০, ৩০, ৩০, ৩৫, ৩৫, ৪০, ৪০, ৪১, ৪২, ৪৫, ৪৫, ৪৫, ৪৫, ৪৬, ৪৭, ৫০। যা একটি বিন্যস্ত উপাত্ত। অবিন্যস্ত উপাত্ত এভাবে বিন্যস্ত করা বেশ জটিল এবং ভুল হওয়ার সম্ভাবনা থেকে যায়। শ্রেণিবিদ্যাসের মাধ্যমে অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ অতিসহজে বিন্যস্ত উপাত্তে রূপান্তর করা যায় এবং গণনাসংখ্যা সার্ভিসের সাহায্যে উপস্থাপন করা হয়।

১১.২ গণসংখ্যা নিবেশন সারণি (Frequency Distribution Table)

উপাত্তের গণসংখ্যা সারণি তৈরি করার জন্য যে কয়েকটি ধাপ ব্যবহার করতে হয় তা হলো

(১) পরিসর নির্ণয়, (২) শ্রেণিসংখ্যা নির্ণয়, (৩) শ্রেণিব্যাপ্তি নির্ণয়, (৪) ট্যালি চিহ্নের সাহায্যে গণসংখ্যা নির্ণয়
অনুসন্ধানাধীন উপাত্তের পরিসর = (সর্বোচ্চ সংখ্যা - সর্বনিম্ন সংখ্যা) + ১

শ্রেণিব্যাপ্তি : যেকোনো অনুসন্ধানলব্ধ উপাত্তের পরিসর নির্ধারণের পর প্রয়োজন হয় শ্রেণিব্যাপ্তি নির্ধারণ উপাত্তগুলোকে সুবিধাজনক ব্যবধান নিয়ে কতকগুলো শ্রেণিতে ভাগ করা হয় উপাত্তের সংখ্যার উপর ভিত্তি করে এগুলো সাধারণত শ্রেণিতে ভাগ করা হয়। শ্রেণিতে ভাগ করার নির্ধারিত কোনো নিয়ম নেই তবে সচরাচর প্রত্যেক শ্রেণিব্যবধান সর্বনিম্ন ৫ ও সর্বোচ্চ ১৫ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ রাখা হয় সুতরাং প্রত্যেক শ্রেণির একটি সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান থাকে যেকোনো শ্রেণির সর্বনিম্ন মানকে এর নিম্নসীমা এবং সর্বোচ্চ মানকে এর উর্ধ্বসীমা বলা হয় আর যেকোনো শ্রেণির উর্ধ্বসীমা ও নিম্নসীমার ব্যবধান হলো সেই শ্রেণির শ্রেণিব্যাপ্তি উদাহরণস্বরূপ, মনে করি, ১০-২০ হলো একটি শ্রেণি এর সর্বনিম্ন মান ১০ ও সর্বোচ্চ মান ২০ এবং $(২০ - ১০) = ১০$ শ্রেণি ব্যাপ্তি হবে $১০ \div ১ = ১১$ । শ্রেণি ব্যাপ্তি সবসময় সমান রাখা শ্রেয়।

শ্রেণিসংখ্যা : শ্রেণিসংখ্যা হচ্ছে পরিসরকে যতগুলো শ্রেণিতে ভাগ করা হয় এর সংখ্যা

অতএব, শ্রেণিসংখ্যা = $\frac{\text{পরিসর}}{\text{শ্রেণিব্যাপ্তি}}$ (পূর্ণ সংখ্যায় রূপান্তরিত)।

ট্যালি চিহ্ন উপাত্তের সংখ্যাসূচক তথ্যবিশিষ্ট মান কোনো না কোনো শ্রেণিতে পড়ে শ্রেণির বিপরীতে সাংখ্যিক মানের জন্য ট্যালি ' ' চিহ্ন দিতে হয় কোনো শ্রেণিতে পাঁচটি ট্যালি চিহ্ন দিতে হলে চারটি দেওয়ার পর পঞ্চমটি আড়াআড়িভাবে দিতে হয়।

গণসংখ্যা শ্রেণিসমূহের মধ্যে সংখ্যাসূচক তথ্যবিশিষ্ট মানগুলো ট্যালি চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করা হয় এবং এর মাধ্যমে গণসংখ্যা বা ঘটনাসংখ্যা নির্ধারণ করা হয় যে শ্রেণিতে কতগুলো ট্যালি চিহ্ন পড়বে তত হবে ঐ শ্রেণির গণসংখ্যা বা ঘটনাসংখ্যা, যা ট্যালি চিহ্নের বিপরীতে গণসংখ্যা কলামে লেখা হয়।

উপরে বর্ণিত বিবেচনাধীন উপাত্তের পরিসর, শ্রেণিব্যাপ্তি ও শ্রেণিসংখ্যা নিচে দেওয়া হলো।

পরিসর = (উপাত্তের সর্বোচ্চ সাংখ্যিক মান - সর্বনিম্ন সাংখ্যিক মান) + ১

$$= (৫০ - ২০) + ১ = ৩১$$

শ্রেণিব্যাপ্তি শ্রেণি ব্যবধান ধরা যায় ৫ তাহলে শ্রেণিসংখ্যা হবে $\frac{৩১}{৫} = ৬.২$ যা পূর্ণ সংখ্যায় রূপান্তর করলে

হবে ৭ অতএব শ্রেণিসংখ্যা ৭ উপাত্তের আলোচনার প্রেক্ষিতে বর্ণিত উপাত্তের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি প্রস্তুত করা হলো :

শ্রেণি ব্যাপ্তি	ট্যালি চিহ্ন	ঘটনসংখ্যা বা গণসংখ্যা
২০-২৪		২
২৫-২৯		২
৩০-৩৪		৪
৩৫-৩৯		২
৪০-৪৪		৪
৪৫-৪৯		৫
৫০-৫৪		১
মোট	২০	২০

কাজ :

তোমরা নিজেদের মধ্য থেকে ২০ জনের দল গঠন কর এবং দলের সদস্যদের উচ্চতার গণসংখ্যা সার্বাণ তৈরি কর

১১.৩ লেখচিত্র (Diagram)

তথ্য ও উপাত্ত লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন একটি বহুলপ্রচলিত পদ্ধতি। কোনো পরিসংখ্যানে বাসহত উপাত্ত লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপিত হলে তা বোঝা ও সিদ্ধান্ত গ্রহণের জন্য খুব সুবিধাজনক হয়। অধিকাংশ চিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপিত উপাত্ত চিত্তাকর্ষক হয়। তাই বোঝা ও সিদ্ধান্ত গ্রহণের সুবিধার্থে উপাত্তসমূহের গণসংখ্যা নিবেদনের চিত্র লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হয়। গণসংখ্যা নিবেদন উপস্থাপনে বিভিন্ন সর্বোত্তম লেখচিত্রের ব্যবহার থাকলেও এখানে কেবলমাত্র আয়তলেখ ও পাইচিত্র নিয়ে আলোচনা করা হবে।

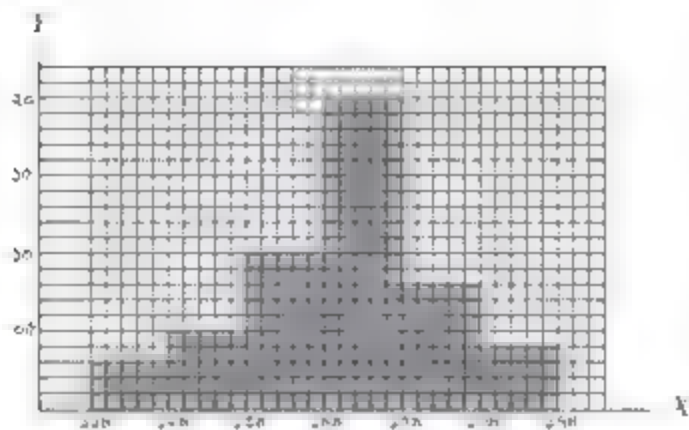
আয়তলেখ (Histogram) গণসংখ্যা নিবেদনের একটি লেখচিত্র হচ্ছে আয়তলেখ। আয়তলেখ অঙ্কনের জন্য দুই কাগজে x ও y -অক্ষ আঁকা হয়। x -অক্ষ দ্বারা শ্রেণিব্যাপ্তি এবং y -অক্ষ দ্বারা গণসংখ্যা নিয়ে আয়তলেখ আঁকা হয়। আয়তের ভূমি হয় শ্রেণিব্যাপ্তি এবং উচ্চতা হয় গণসংখ্যা।

উদাহরণ ১ : নিচে ৫০ জন শিক্ষার্থীর উচ্চতার গণসংখ্যা নিবেদন দেওয়া হলো। একটি আয়তলেখ আঁক।

উচ্চতার শ্রেণিব্যাপ্তি (সেমিতে),	১১৪-১২৪	১২৪-১৩৪	১৩৪-১৪৪	১৪৪-১৫৪	১৫৪-১৬৪	১৬৪-১৭৪
গণসংখ্যা (শিক্ষার্থীর সংখ্যা)	৩	৫	১০	২০	৮	৪

ছক কাগজের ১ ঘর সমান শ্রেণিব্যাপ্তির ২ একক ধরে x -অক্ষে শ্রেণিব্যাপ্তি এবং ছক কাগজের ১ ঘর সমান গণসংখ্যার ১ একক ধরে y -অক্ষে গণসংখ্যা নিবেদন স্থাপন করে গণসংখ্যা নিবেদনের আয়তলেখ আঁকা হলো। x -অক্ষের মূলবিন্দু থেকে ১১৪ ঘর পর্যন্ত স্তম্ভ চিহ্ন দিয়ে আগের ছরগুলো বিদ্যমান বোঝানো হয়েছে।

ফর্ম-২১, গণিত-অষ্টম শ্রেণি (দক্ষিণ)



কাজ : (ক) ৩০ জন নিয়ে দল গঠন কর। দলের সদস্যদের গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি কর।
(খ) গণসংখ্যা নিবেশনের আরতলেখ আঁক।

পাইচিত্র (Pie Chart). পাইচিত্রও একটি লেখচিত্র। অনেক সময় সংগৃহীত পরিসংখ্যান কয়েকটি উপাদানের সমষ্টি দ্বারা গঠিত হয় অথবা একে কয়েকটি প্রেক্ষিতে ভাগ করা হয়। এ সকল ভাগকে একটি বৃত্তের অভ্যন্তরে বিভিন্ন অংশে প্রকাশ করলে যে লেখচিত্র পাওয়া যায় তাই পাইচিত্র। পাইচিত্রকে বৃত্তলেখও বলা হয়। আমরা জানি, বৃত্তের কেন্দ্রে সৃষ্ট কোণের পরিমাণ ৩৬০°। কোনো পরিসংখ্যান ৩৬০° এর অংশ হিসেবে উপস্থাপিত হলে তা হবে পাইচিত্র।

আমরা জানি, ক্রিকেটখেলায় ১, ২, ৩, ৪, ও ৬ করে রান সংগৃহীত হয়। তাছাড়া নো বাল ও ওয়াইড বলের জন্য অতিরিক্ত রান সংগৃহীত হয়। কোনো এক খেলায় বাংলাদেশ ক্রিকেট দলের সংগৃহীত রান নিচের সারণিতে দেওয়া হলো :

রান সংগ্রহ	১ করে	২ করে	৩ করে	৪ করে	৬ করে	অতিরিক্ত রান	মোট
নির্ভিন্ন প্রকারের সংগৃহীত রান	৬৬	৫০	৩৬	৪৮	৩০	১০	২৪০

ক্রিকেট খেলার উপন্যাস পাইচিরের মাধ্যমে দেখানো হলে, বোম্বার জনগণের মন সহজ হয় তেমন চিত্তাকর্ষকও হয়। আমরা জানি, বৃষের কেন্দ্রে সূর্য কোণ ৩৬০। উপরে বর্ণিত উপন্যাস ৩৬০-এর অংশ হিসেবে উপস্থাপন করা হলে, উপন্যাসের পাইচির পাওয়া যাবে।

২৪০ রানের জন্য কোণ - ৩৬০°

5 " " " = 960^g
 280

ଓଡ଼ିଆ " " " ଓଡ଼ିଆ x ଓଡ଼ିଆ ଓଡ଼ିଆ
 ୧୫୦

୧୦ ସାମାନ୍ୟ ଖର୍ଚ୍ଚ - $\frac{75}{280} \times 360 = 96$

$$৩৬ \text{ মাসের জন্য কোণ} = \frac{৩৬}{২৪০} \times ৩৬০ = ৫৪$$

৪৮ বানের জন্য কোণ - $\frac{84}{280} \times 360 = 108$

$$৩০ \text{ ব্রাহ্মের ক্ষমা কোণ} - \frac{৩০}{২৪০} \times ৩৬০ = ৪৫$$

$$10 \text{ সাতনের জন্য কোণ} = \frac{10}{280} \times 360^\circ = 12.86^\circ$$



এখান, প্রাক্তন কোণগুলো ৩৬০ এর অংশ হিসাবে আঁকা হলো। যা বর্ণিত উপায়ের পাইচিট্র

উদাহরণ ২। কোনো এক বছরে দুইটিলাভজনিত কারণে সংশ্লিষ্ট মৃত্যুর সাক্ষি নিচে দেয়া হলো। একটি পাইচিট্র অঁক

দুইটনা	হাস	ট্রাক	কার	লৌহান	মোট
মৃতের সংখ্যা	৪৫০	৩৫০	২৫০	১৫০	১২০০

সমাধান : বাস দুঘটিনায় মৃত ৪৫০ জনের জন্য কোণ = $\frac{840}{1200} \times 360^\circ = 126^\circ$

$$\text{ট্রাক দুর্ঘটনার মৃত ৩৫০ জনের জন্য কোণ} = \frac{৩৫০}{১২০০} \times ৩৬০^\circ = ১০৫^\circ$$

কারি দুঘণ্টায় মৃত ২৫০ জনের জন্য কোণ - $\frac{250}{1200} \times 360^\circ = 75^\circ$

লৌহান দুইটনার দূত ১৫০ জনের জন্য কোণ = $\frac{150}{1200} \times 360^\circ = 45^\circ$



এখন, কোণগুলো 360° এর অংশ হিসাবে আঁকা হলো যা নির্ণয় পাইচ্ছ।

উদাহরণ ৩ দুইটিনায় মূল ৪৫০ জনের মধ্যে কতজন নারী, পুরুষ ও শিশু তা পাইচিটে দেখানো হয়েছে নারীর জন্য নির্দেশিত কোণ ৮০° । নারীর সংখ্যা কত ?

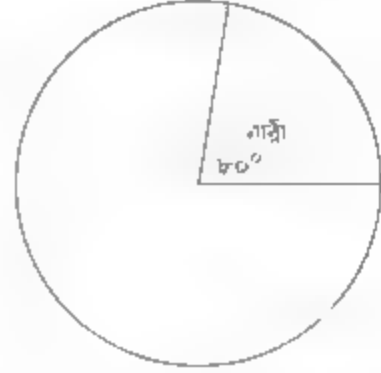
সমাধান : আমরা জানি, বৃত্তের কেন্দ্রে সৃষ্ট কোণ ৩৬০° ।

সুতরাং ৩৬০° এর জন্য ৪৫০ জন

$$1^\circ \text{ এর জন্য } \frac{৪৫০}{৩৬০} \text{ জন}$$

$$৮০^\circ \text{ এর জন্য } \frac{৪৫০}{৩৬০} \times ৮০ \text{ জন} = ১০০ \text{ জন}$$

নির্ণেয় নারীর সংখ্যা ১০০ জন।



কাজ :

- ১। তোমাদের শ্রেণিতে অভিযানরত শিক্ষার্থীদের ৬ জন করে নিয়ে দল গঠন কর। দলের সদস্যরা নিজস্বদের উচ্চতা মাপ এবং প্রাপ্ত উপাত্ত পাইচিটের মাধ্যমে দেখাও।
- ২। তোমরা তোমাদের পরিবারের সকলের বয়সের উপাত্ত নিয়ে পাইচিট আঁক। প্রত্যেকের বয়সের নির্ধারিত কোণের ত্রাণ কর বয়স কত তা নির্ণয়ের জন্য পালের শিক্ষার্থীর সাথে খাতা বদল কর।

১১.৪ কেন্দ্রীয় প্রবণতা (Central Tendency)

ধরা যাক, কোনো একটি সমস্যা সমাধানে ২৫ জন ছাত্রীকে যে সময় (সেকেন্ডে) লাগে তা হলো

২২, ১৬, ২০, ৩০, ২৫, ৩৬, ৩৫, ৩৭, ৪০, ৪৩, ৪৩, ৪৩, ৪৩, ৪৪, ৪৩, ৪৪, ৪৬, ৪৫, ৪৮, ৫০, ৬৪, ৫৮, ৬৮, ৫৫, ৬২, ৬০।

সংখ্যাগুলো মানের ঊর্ধ্বক্রমে সাজালে হয় :

১৬, ২০, ২২, ২৫, ৩০, ৩৫, ৩৬, ৩৭, ৪০, ৪৩, ৪৩, ৪৩, ৪৩, ৪৪, ৪৪, ৪৫, ৪৬, ৪৮, ৫০, ৫৫, ৫৮, ৬০, ৬০, ৬২, ৬৪। বর্ণিত উপাত্তসমূহ মাঝামাঝি মান ৪৩ বা ৪৪ এ পুঞ্জীভূত। গণসংখ্যা সারণিতে এই প্রবণতা পরিদর্শিত হয়। বর্ণিত উপাত্তের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করলে হয়

বয়স	১৬-২৫	২৬-৩৫	৩৬-৪৫	৪৬-৫৫	৫৬-৬৫
গণসংখ্যা	৪	২	১০	৫	৪

এই গণসংখ্যা নিবেশন সারণিতে দেখা যাচ্ছে ৩৬-৪৫ ত্রিণিতে গণসংখ্যা সর্বাধিক। সুতরাং উপরের আলোচনা থেকে এটা স্পষ্ট যে, উপাত্তসমূহ মাঝামাঝি বা কেন্দ্রের মানের দিকে পুঞ্জীভূত হয়। মাঝামাঝি বা কেন্দ্রে মানের দিকে উপাত্তসমূহের পুঞ্জীভূত হওয়ার প্রবণতাকে কেন্দ্রীয় প্রবণতা বলে। কেন্দ্রীয় মান উপাত্তসমূহের প্রতিমিত্রকারী একটি সংখ্যা যার দ্বারা কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ করা হয়। সাধারণভাবে কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ হলো (১) গাণিতিক গড় বা গড় (২) মধ্যক (৩) প্রচুরক।

১১.৫ গাণিতিক গড় (Arithmetic Mean)

আমরা জানি, উপাত্তসমূহের সংখ্যাসূচক মানের সমষ্টিকে যদি উপাত্তসমূহের সংখ্যা দিয়ে ভাগ করা হয়, তবে গাণিতিক গড় পাওয়া যায় মনে করি, উপাত্তসমূহের সংখ্যা n এবং এদের সংখ্যাসূচক মান $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$,

যদি উপাত্তসমূহের গাণিতিক গড় মান \bar{x} হয়, তবে $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ । এখানে,

Σ (সিগমা) একটি গ্রিক অক্ষর যা দ্বারা উপাত্তের সংখ্যাসূচক মানসমূহের যোগফল বোঝানো হয়েছে

উদাহরণ ৪ : ৫০ নম্বরের মধ্যে অনুষ্ঠিত পরীক্ষায় কোনো শ্রেণির ২০ জন শিক্ষার্থীর গণিতের প্রাপ্ত নম্বর ৪০, ৪১, ৪৫, ১৮, ৪১, ২০, ৪৫, ৪১, ৪৫, ২৫, ২০, ৪০, ১৮, ২০, ৪৫, ৪৭, ৪৮, ৪৮, ৪৯, ১৯, প্রাপ্ত নম্বরের গাণিতিক গড় নির্ণয় কর ।

সমাধান : এখানে $n = ২০, x_1 = ৪০, x_2 = ৪১, x_3 = ৪৫, \dots$ ইত্যাদি

গাণিতিক গড় যদি \bar{x} হয়, তবে $\bar{x} = \frac{\text{নম্বরগুলোর সমষ্টি}}{\text{নম্বরগুলোর সংখ্যা}}$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{৪০ + ৪১ + ৪৫ + \dots + ১৯}{২০} = \frac{৭১৫}{২০} = ৩৫.৭৫$$

\therefore গাণিতিক গড় ৩৫.৭৫

অবিন্যস্ত উপাত্তের গাণিতিক গড় নির্ণয় (সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি) :

উপাত্তের সংখ্যা যদি বেশি হয় তবে আগের পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা বেশ জটিল হয় এবং বেশি সংখ্যক উপাত্তের সংখ্যাসূচক মানের সমষ্টি নির্ণয় করতে ভুল হওয়ার সম্ভাবনা থাকে এক্ষেত্রে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি ব্যবহার করা বেশ সুবিধাজনক ।

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে উপাত্তসমূহের কেন্দ্রীয় প্রবণতা ভালেভাবে পর্যবেক্ষণ করে এদের সম্ভাব্য গড় অনুমান করা হয় উপরের উদাহরণে প্রদত্ত উপাত্তের কেন্দ্রীয় প্রবণতা ভালেভাবে লক্ষ করলে বোঝা যায় যে, গাণিতিক গড় ৩০ থেকে ৪৬ এর মধ্যে একটি সংখ্যা মনে করি, গাণিতিক গড় ৩০ এখন প্রত্যেক সংখ্যা থেকে অনুমিত গড় ৩০ বিয়োগ করে বিয়োগফল নির্ণয় করতে হবে সংখ্যাটি ৩০ থেকে বড় হলে বিয়োগফল ধনাত্মক এবং ছোট হলে বিয়োগফল ঋণাত্মক হবে এরপরে সকল বিয়োগফলের দ্বিভাগগাণিতিক সমষ্টি নির্ণয় করতে হয় পরপর দুইটি বিয়োগফল যোগ করে ক্রমযোজিত সমষ্টি নির্ণয়ের মাধ্যমে সকল বিয়োগফলের সমষ্টি অতি সহজে নির্ণয় করা যায় অর্থাৎ, বিয়োগফলের গণসংখ্যা ক্রমযোজিত গণসংখ্যার সমান হবে উপরের উদাহরণে ব্যবহৃত উপাত্তের গাণিতিক গড় কীভাবে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে করা হয় তা নিচের সারণিতে উপস্থাপন করা হলো মনে করি, উপাত্তসমূহ x_1, x_2, \dots, x_n এর অনুমিত গড় a ($= ৩০$)

পাশে উপস্থাপিত সারণি থেকে,

ক্রমযোজিত গণসংখ্যা = ১১৫

এবং মোট উপাত্ত সংখ্যা = ২০

$$\therefore \text{ক্রমযোজিত গণসংখ্যার গড়} = \frac{১১৫}{২০} = ৫.৭৫$$

সুতরাং প্রকৃত গড়

$$= \text{অনুমিত গড়} + \text{ক্রমযোজিত গণসংখ্যার গড়}$$

$$= ৩০ + ৫.৭৫ - ৩৫.৭৫$$

মন্তব্য : সুবিধার্থে এবং সময় সাশ্রয়ের জন্য কলামের মধ্যকার যোগ-বিয়োগ মনে মনে করে সর্বাসঙ্গি ফলাফল লেখা যায়

কাজ : ডোমরা উপরের উপাত্তের আলোকে অনুমিত গড় ৩৫ ধরে সংশ্লিষ্ট পদ্ধতিতে গাণিতিক গড় নির্ণয় কর।

উপাত্ত x_i	$x_i - d$	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
৪০	$৪০ - ৩০ = ১০$	১০
৪১	$৪১ - ৩০ = ১১$	$১০ + ১১ = ২১$
৪৫	$৪৫ - ৩০ = ১৫$	$২১ + ১৫ = ৩৬$
১৮	$১৮ - ৩০ = -১২$	$৩৬ - ১২ = ২৪$
৪১	$৪১ - ৩০ = ১১$	$২৪ + ১১ = ৩৫$
২০	$২০ - ৩০ = -১০$	$৩৫ - ১০ = ২৫$
৪৫	$৪৫ - ৩০ = ১৫$	$২৫ + ১৫ = ৪০$
৪১	$৪১ - ৩০ = ১১$	$৪০ + ১১ = ৫১$
৪৫	$৪৫ - ৩০ = ১৫$	$৫১ + ১৫ = ৬৬$
২৫	$২৫ - ৩০ = -৫$	$৬৬ - ৫ = ৬১$
২০	$২০ - ৩০ = -১০$	$৬১ - ১০ = ৫১$
৪০	$৪০ - ৩০ = ১০$	$৫১ + ১০ = ৬১$
১৮	$১৮ - ৩০ = -১২$	$৬১ - ১২ = ৪৯$
২০	$২০ - ৩০ = -১০$	$৪৯ - ১০ = ৩৯$
৪৫	$৪৫ - ৩০ = ১৫$	$৩৯ + ১৫ = ৫৪$
৪৭	$৪৭ - ৩০ = ১৭$	$৫৪ + ১৭ = ৭১$
৪৮	$৪৮ - ৩০ = ১৮$	$৭১ + ১৮ = ৮৯$
৪৮	$৪৮ - ৩০ = ১৮$	$৮৯ + ১৮ = ১০৭$
৪৯	$৪৯ - ৩০ = ১৯$	$১০৭ + ১৯ = ১২৬$
১৯	$১৯ - ৩০ = -১১$	$১২৬ - ১১ = ১১৫$

বিন্যস্ত উপাত্তের গাণিতিক গড়

উদাহরণ ৪ এর ২০ জন শিক্ষার্থীর দ্বিভুক্ত প্রাপ্ত নম্বরের মধ্যে একই নম্বর একাধিক শিক্ষার্থী পেয়েছে।

প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি পাঠে দেওয়া হলো :

প্রাপ্ত নম্বর		গণসংখ্যা		f
i	k	i	k	
18		2		36
19		1		19
20		3		60
25		1		25
40		2		80
41		3		123
45		4		180
49		1		49
48		2		96
49		1		49
k = 10	k = 10, n = 20	মোট = 915		

$$\text{প্রাপ্ত নম্বরের গড়} = \frac{f \text{ এর সমষ্টি}}{\text{মোট গণসংখ্যা}} = \frac{৭১৫}{২০} = ৩৫.৭৫$$

সূত্র ১। গাণিতিক গড় (বিন্যস্ত উপাত্ত) : যদি n সংখ্যক উপাত্তের k সংখ্যক মান $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$

এর গণসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$ হয়, তবে উপাত্তের গাণিতিক গড় = $\frac{\sum_{i=1}^k x_i f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$ যেখানে n হলো মোট গণসংখ্যা।

উদাহরণ ৫ নিচে কোনো একটি শ্রেণির ১০০ জন শিক্ষার্থীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। প্রাপ্ত নম্বরের গাণিতিক গড় নির্ণয় কর।

শ্রেণিব্যক্তি	২৫-৩৪	৩৫-৪৪	৪৫-৫৪	৫৫-৬৪	৬৫-৭৪	৭৫-৮৪	৮৫-৯৪
গণসংখ্যা	৫	১০	১৫	২০	৩০	১৬	৪

সমাধান : এখানে শ্রেণিব্যাপ্তি দেওয়া আছে বিধায় শিক্ষার্থীদের বার্তাগত মধ্যর কত তা জানা যায় না। এ ক্ষেত্রে প্রত্যেক শ্রেণির শ্রেণি মধ্যমান নির্ণয় করার প্রয়োজন হয়।

$$\text{শ্রেণি মধ্যমান} = \frac{\text{শ্রেণির উর্ধ্বমান} + \text{শ্রেণির নিম্নমান}}{2}$$

যদি শ্রেণি মধ্যমান $(i = 1, 2, \dots, k)$ হয় তবে মধ্যমান সংবলিত সারণি হবে নিম্নরূপ।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	শ্রেণি মধ্যমান (x_i)	গণসংখ্যা (f_i)	$(f_i x_i)$
২৫ – ৩৪	২৯.৫	৫	১৪৭.৫
৩৫ – ৪৪	৩৯.৫	১০	৩৯৫.০
৪৫ – ৫৪	৪৯.৫	১৫	৭৪২.৫
৫৫ – ৬৪	৫৯.৫	২০	১১৯০.০
৬৫ – ৭৪	৬৯.৫	৩০	২০৮৫.০
৭৫ – ৮৪	৭৯.৫	১৬	১২৭২.০
৮৫ – ৯৪	৮৯.৫	৪	৩৫৮.০
মোট		১০০	৬১৯০.০০

$$\begin{aligned} \text{নির্ণেয় গাণিতিক গড়} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k f_i x_i = \frac{1}{100} \times 6190 \\ &= 61.9 \end{aligned}$$

১১.৬ মধ্যক (Median)

আমরা ৭ম শ্রেণিতে পরিসংখ্যানে অনুসন্ধানধীন উপাত্তসমূহের মধ্যক সম্বন্ধে জেনেছি।

ধরা যাক, ৫, ৩, ৪, ৮, ৬, ৭, ৯, ১১, ১০ কতকগুলো সংখ্যা। এ সংখ্যাগুলোকে মানের ক্রমানুসারে সাজালে হয়, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ৮, ৯, ১০, ১১। ক্রমবিন্যস্ত সংখ্যাগুলোকে সমান দুই ভাগ করলে হয়

$$3, 4, 5, 6, | 7, 8, 9, 10, 11$$

এখানে দেখা যাচ্ছে যে, ৭ সংখ্যাগুলোকে সমান দুই ভাগে ভাগ করেছে এবং এর অবস্থান মাঝে। সুতরাং এখানে মধ্যপদ হলো ৫ম পদ। এই ৫ম পদ বা মধ্যপদের মান ৭। অতএব, সংখ্যাগুলোর মধ্যক হলো ৭। এখানে প্রদত্ত উপাত্তগুলো বা সংখ্যাগুলো বিজোড় সংখ্যক। আর যদি সংখ্যাগুলো জোড় সংখ্যক হয়, যেমন ৮, ৯, ১০, ১১, ১২, ১৩, ১৪, ১৫, ১৬, ১৭, ১৮, ১৯, ২০, ২১, ২২ এর মধ্যক কী হবে? সংখ্যাগুলোকে সমান দুই ভাগ করলে হবে

৮, ৯ ১০, ১১, ১২ ১৩, ১৪ ১৫, ১৬, ১৭ ১৮ ১৯ ২০, ২১, ২২

দেখা যাচ্ছে যে, ১৩ ও ১৫ সংখ্যাগুলোকে সমান দুই ভাগে ভাগ করেছে এবং এদের অবস্থান মাঝামাঝি এখানে মধ্যপদ ৬ষ্ঠ ও ৭ম পদ সুতরাং মধ্যক হবে ৬ষ্ঠ ও ৭ম পদের সংখ্যা দুইটির গড় মান ৬ষ্ঠ ও

$$\text{৭ম পদের সংখ্যার গড় মান} = \frac{১৩ + ১৫}{২} \text{ বা } ১৪ \text{ অর্থাৎ, এখানে মধ্যক } ১৪$$

উপরের আলোচনা থেকে আমরা বলতে পারি যে, যদি n সংখ্যক উপাত্ত থাকে এবং n যদি বিজোড় সংখ্যা হয় তবে উপাত্তগুলোর মধ্যক হবে $\frac{n+1}{2}$ তম পদের মান আর n যদি জোড় সংখ্যা হয় তবে মধ্যক

$$\text{হবে } \frac{n}{2} \text{ তম ও } \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \text{ তম পদ দুইটির সাংখ্যিক মানের গড়।}$$

উপাত্তগুলোকে মানের ক্রমানুসারে সাজালে যে মান উপাত্তগুলোকে সমান দুই ভাগে ভাগ করে সেই মানই হবে উপাত্তগুলোর মধ্যক।

উদাহরণ ৬। নিচের সংখ্যাগুলোর মধ্যক নির্ণয় কর ২৩, ১১, ২৫, ১৫, ২১, ১২, ১৭, ১৮, ২২, ২৭, ২৯, ৩০, ১৬, ১৯

সমাধান : সংখ্যাগুলোকে মানের ক্রমানুসারে উর্ধ্বক্রমে সাজানো হলো

১১, ১২, ১৫, ১৬, ১৭, ১৮, ১৯, ২১, ২২, ২৩, ২৫, ২৭, ২৯, ৩০

এখানে $n = ১৪$, বা জোড় সংখ্যা।

$$\begin{aligned} \text{মধ্যক} &= \frac{\frac{১৪}{২} \text{ তম ও } \left(\frac{১৪}{২} + ১ \right) \text{ তম পদ দুইটির মানের যোগফল}}{২} \\ &= \frac{৭ম পদ ও ৮ম পদ দুইটির মানের যোগফল}{২} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{মধ্যক} = \frac{১৯ + ২১}{২} = \frac{৪০}{২} = ২০$$

অতএব, মধ্যক ২০।

কাজ : ১ তোমাদের শ্রেণিতে অধ্যয়নরত শিক্ষার্থীদের থেকে ১৯ জন, ২০ জন ও ২১ জন নিয়ে ৩টি দল গঠন কর প্রত্যেক দল তার সদস্যদের রোল নম্বরগুলো নিয়ে দলের মধ্যক নির্ণয় কর

উদাহরণ ৭ নিচে ৫০ জন ছাত্রীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো মধ্যক নির্ণয় কর

প্রাপ্ত নম্বর	৪৫	৫০	৬০	৬৫	৭০	৭৫	৮০	৯০	৯৫	১০০
গণসংখ্যা	৩	২	৫	৮	১০	১৫	৫	৩	২	১

ফর্ম-২২, গণিত-অষ্টম শ্রেণি (দাখিল)

সমাধান : মধ্যক নির্ণয়ের গণসংখ্যা সারণি

শ্রেণি নম্বর	গণসংখ্যা	যোগিত গণসংখ্যা
৪৫	৩	৩
৫০	২	৫
৬০	৫	১০
৬৫	৪	১৪
৭০	১০	২৪
৭৫	১৫	৩৯
৮০	৫	৪৪
৯০	৩	৪৭
৯৫	২	৪৯
১০০	১	৫০

এখানে, $n = ৫০$, যা জোড় সংখ্যা

$$\begin{aligned} \text{মধ্যক} &= \frac{\frac{৫০}{২} \text{ তম ও } \left\{ \frac{৫০}{২} + ১ \right\} \text{ তম পদ দুইটির সাংখ্যিক মানের যোগফল}}{২} \\ &= \frac{৭৫ + ৭৫}{২} \text{ বা } ৭৫ \end{aligned}$$

ছাত্রীদের শ্রেণি নম্বরের মধ্যক ৭৫।

লক্ষ করি : এখানে ২৫তম থেকে ৩৯তম প্রত্যেকটি পদের মান ৭৫।

কাজ : তোমাদের শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীকে নিয়ে ২টি দল গঠন কর। একটি সমান্য সমাধানে প্রত্যেকের কত সময় লাগে (ক) তার গণসংখ্যা নিবন্ধন সারণি তৈরি কর, (খ) সারণি হতে মধ্যক নির্ণয় কর

১১.৭ প্রচুরক (Mode)

মনে করি, ১১, ৯, ১০, ১২, ১১, ১২, ১৪, ১১, ১০, ২০, ২১, ১১, ৯ ও ১৮ একটি উপাত্ত। উপাত্তটি মানের উর্ধ্বক্রমে সাজালে হয়—

৯, ৯, ১০, ১০, ১১, ১১, ১১, ১১, ১২, ১২, ১৪, ১৮, ২০, ২১।

বিন্যাসকৃত উপাত্তটি লক্ষ করলে দেখা যায় যে, ১১ সংখ্যাটি ৪ বার উপস্থাপিত হয়েছে যা উপস্থাপনায় সর্বাধিক বার। যেহেতু উপাত্তে ১১ সংখ্যাটি সবচেয়ে বেশি বার আছে তাই এখানে ১১ হলো উপাত্তগুলোর প্রচুরক

কোনো উপাত্তে যে সংখ্যাটি সবচেয়ে বেশি বার থাকে তাকে প্রচুরক বলে

উদাহরণ ৮। নিচে ৩০ জন ছাত্রের বার্ষিক পরীক্ষায় ইংরেজিতে প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হলো। উপাত্তগুলোর প্রচুরক নির্ণয় কর।

৭৫, ৩৫, ৪০, ৮০, ৬৫, ৮০, ৮০, ৯০, ৯৫, ৮০, ৬৫, ৬০, ৭৫, ৮০, ৪০, ৬৭, ৭০, ৭২, ৬৯, ৭৮, ৮০, ৮০, ৬৫, ৭৫, ৭৫, ৮৮, ৯৩, ৮০, ৭৫, ৬৫।

সমাধান উপাত্তগুলোকে মানের উর্ধ্বক্রমে সাজানো হলো ৩৫, ৪০, ৪০, ৬০, ৬৫, ৬৫, ৬৫, ৬৫, ৬৭, ৬৯, ৭০, ৭২, ৭৫, ৭৫, ৭৫, ৭৫, ৭৫, ৭৫, ৭৮, ৮০, ৮০, ৮০, ৮০, ৮০, ৮০, ৮০, ৮০, ৮০, ৮৮, ৯০, ৯৩, ৯৫।
উপাত্তগুলোর উপস্থাপনায় ৪০ আছে ২ বার, ৬৫ আছে ৪ বার, ৭৫ আছে ৫ বার, ৮০ আছে ৮ বার এবং বাকি নম্বরগুলো ১ বার করে আছে। এখানে ৮০ আছে সর্বাধিক ৮ বার। সুতরাং উপাত্তগুলোর প্রচুরক ৮০।

নির্ণেয় প্রচুরক ৮০

উদাহরণ ৯। নিচের উপাত্তসমূহের প্রচুরক নির্ণয় কর :

৪, ৬, ৯, ২০, ১০, ৮, ১৮, ১৯, ২১, ২৪, ২৬, ৩০।

সমাধান : উপাত্তসমূহকে মানের উর্ধ্বক্রমে সাজানো হলো :

৪, ৬, ৮, ৯, ১০, ১৮, ১৯, ২০, ২১, ২৩, ২৪, ৩০।

এখানে লক্ষ্যীয় যে, কোনো সংখ্যাই একাধিকবার ব্যবহৃত হয়নি। তাই উপাত্তগুলোর প্রচুরক নেই।

অনুশীলনী ১১

১। নিচের কোনটি বাস্তব শ্রেণিব্যাপ্তি বোঝায় ?

- (ক) উপাত্তগুলোর মধ্যে প্রথম ও শেষ উপাত্তের ব্যবধান
- (খ) উপাত্তগুলোর মধ্যে শেষ ও প্রথম উপাত্তের সমষ্টি
- (গ) প্রত্যেক শ্রেণির বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম উপাত্তের সমষ্টি
- (ঘ) প্রতিটি শ্রেণির অন্তর্ভুক্ত ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম সংখ্যার ব্যবধান।

২। একটি শ্রেণিতে যতগুলো উপাত্ত অন্তর্ভুক্ত হবে তার নির্দেশক নিচের কোনটি ?

- (ক) শ্রেণির গণসংখ্যা
- (খ) শ্রেণির মধ্যবিন্দু
- (গ) শ্রেণিসীমা
- (ঘ) ক্রমোন্নীকৃত গণসংখ্যা

৩। ৮, ১২, ১৬, ১৭, ২০ সংখ্যাগুলোর গড় কত ?

- (ক) ১০.৫
- (খ) ১২.৫
- (গ) ১৩.৬
- (ঘ) ১৪.৬

৪। ১০, ১২, ১৪, ১৮, ১৯, ২৫ সংখ্যাগুলোর মধ্যক কত ?

(ক) ১১.৫ (খ) ১৪.৬

(গ) ১৬ (ঘ) ১৮.৬

৫। ৬, ১২, ৭, ১২, ১১, ১২, ১১, ৭, ১১ এর প্রচুরক কোনটি ?

(ক) ১১ ও ৭ (খ) ১১ ও ১২

(গ) ৭ ও ১২ (ঘ) ৬ ও ৭

◆ নিচে তোমাদের শ্রেণির ৪০ জন শিক্ষার্থীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো

শ্রেণিব্যাপ্তি	৪১-৫৫	৫৬-৭০	৭১-৮৫	৮৬-১০০
গণসংখ্যা	৬	১০	২০	৪

এই সারণির আলোকে (৬-৮) নম্বর পর্যন্ত প্রশ্নের উত্তর দাও :

৬। উল্লিখিত শ্রেণিব্যাপ্তি কোনটি ?

(ক) ৫ (খ) ১০

(গ) ১২ (ঘ) ১৫

৭। দ্বিতীয় শ্রেণির শ্রেণিমধ্যমান কোনটি ?

(ক) ৪৮ (খ) ৬৩

(গ) ৭৮ (ঘ) ৯৩

৮। প্রদত্ত সারণিতে প্রচুরক শ্রেণির নিম্নসীমা কোনটি ?

(ক) ৪১ (খ) ৫৬

(গ) ৭১ (ঘ) ৮৬

৯। ২৫ জন শিক্ষার্থীর বার্ষিক পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর নিচে দেওয়া হলো :

৭২, ৮৫, ৭৮, ৮৪, ৭৮, ৭৫, ৬৯, ৬৭, ৮৮, ৮০, ৭৪, ৭৭, ৭৯, ৬৯, ৭৪, ৭৩, ৮৩, ৬৫, ৭৫, ৬৯, ৬৩, ৭৫, ৮৬, ৬৬, ৭১।

(ক) প্রাপ্ত নম্বরের সরাসরি গড় নির্ণয় কর।

(খ) শ্রেণিব্যাপ্তি ৫ নিয়ে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি কর এবং সারণি থেকে গড় নির্ণয় কর।

(গ) সরাসরিভাবে প্রাপ্ত গড়ের সাথে 'খ' থেকে প্রাপ্ত গড়ের পার্থক্য দেখাও।

১০ নিচে একটি সারণি দেওয়া হলো এর গড় মান নির্ণয় কর উপাত্তগুলোর আয়তলেখ আঁক।

প্রাপ্ত নম্বর	৬-১০	১১-১৫	১৬-২০	২১-২৫	২৬-৩০	৩১-৩৫	৩৬-৪০	৪১-৪৫
গণসংখ্যা	৫	১৭	৩০	৩৮	৫৫	১০	৭	৩

১১ : নিচের সারণি থেকে গড় নির্ণয় কর :

দৈনিক আয় (টাকায়)	২২১০	২২১৫	২২২০	২২২৫	২২৩০	২২৩৫	২২৪০	২২৪৫	২২৫০
গণসংখ্যা	২	৩	৫	৭	৬	৫	৫	৪	৩

১২ : নিচে ৪০ জন গৃহিণীর সাপ্তাহিক সঞ্চয় (টাকায়) নিচে দেওয়া হলো

১৫৫, ১৭০, ১৬৬, ১৪৩, ১৬৮, ১৬০, ১৫৬, ১৪৬, ১৬২, ১৫৮, ১৫৯, ১৪৮, ১৫০, ১৪৭, ১০২, ১৩৬, ১৫৬, ১৪০, ১৫৫, ১৪৫, ১৩৫, ১৫১, ১৪১, ১৬৯, ১৪০, ১২৫, ১২২, ১৪০, ১৩৭, ১৭৫, ১৪৫, ১৫০, ১৬৪, ১৪২, ১৫৬, ১৫২, ১৪৬, ১৪৮, ১৫৭ ও ১৬৭।

সাপ্তাহিক জমানোর গড়, মধ্যক ও প্রচুরক নির্ণয় কর।

১৩ নিচের উপাত্তসমূহের গড় এবং উপাত্তের আয়তলেখ আঁক

বয়স (বছর)	৫-৬	৭-৮	৯-১০	১১-১২	১৩-১৪	১৫-১৬	১৭-১৮
গণসংখ্যা	২৫	২৭	২৮	৩১	২৯	২৮	২২

১৪ একটি কারখানার ১০০ শ্রমিকের মাসিক মজুরির গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো শ্রমিকদের মাসিক মজুরির গড় কত? উপাত্তগুলোর আয়তলেখ আঁক।

মাসিক মজুরি (শত টাকায়)	৫১-৫৫	৫৬-৬০	৬১-৬৫	৬৬-৭০	৭১-৭৫	৭৬-৮০	৮১-৮৫	৮৬-৯০
গণসংখ্যা	৬	২০	৩০	১৫	১১	৮	৬	৪

১৫ ৮ম শ্রেণির ৩০ জন শিক্ষার্থীর ইংরেজি বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বর হলো

৪৫, ৪২, ৬০, ৬১, ৫৮, ৫৩, ৪৮, ৫২, ৫১, ৪৯, ৭০, ৫২, ৫৭, ৭১, ৬৪, ৪৯, ৫৬, ৪৮, ৬৭, ৬৩, ৭০, ৫৯, ৫৪, ৪৬, ৪৩, ৫৬, ৫৯, ৪৩, ৬৮, ৫২।

(ক) শ্রেণিব্যবধান ৫ ধরে শ্রেণিসংখ্যা কত?

(খ) শ্রেণিব্যবধান ৫ ধরে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি কর।

(গ) সারণি থেকে গড় নির্ণয় কর।

১৬. ৫০ জন শিক্ষার্থীর দৈনিক সঞ্চয় নিচে দেওয়া হলো :

সঞ্চয়, টাকায়	৪১-৫০	৫১-৬০	৬১-৭০	৭১-৮০	৮১-৯০	৯১-১০০
গণসংখ্যা	৬	৮	১৩	১৫	৮	৫

(ক) ক্রমযোজিত গণসংখ্যার সারণি তৈরি কর।

(খ) সারণি থেকে গড় নির্ণয় কর।

১৭. নিচের সারণিতে ২০০ জন শিক্ষার্থীর পছন্দের ফল দেখানো হলো। প্রদত্ত উপাত্তের পাইচিত্র আঁক

ফল	গ্রাম	কঁঠাল	লিচু	জাম্বাংলা
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	৭০	৩০	৮০	২০

১৮. ৭২০ জন শিক্ষার্থীর পছন্দের বিষয় পাইচিত্রে উপস্থাপন করা হলো। সংখ্যায় প্রকাশ কর



বাংলা : ৯০%

ইংরেজি : ৩০%

গণিত : ৫০%

বিজ্ঞান : ৬০%

ধর্ম : ৮০%

সর্বমোট : ৫০%

৩৬০°

১৯. ৫০ জন ছাত্রীর গণিতের নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো

গ্রা. নম্বর	৬০	৬৫	৭০	৭৫	৮০	৮৫
গণসংখ্যা	৫	৮	১১	১৫	৮	৩

ক. মধ্যক নির্ণয় কর

খ. গড় নির্ণয় কর।

গ. প্রদত্ত উপাত্তের পাইচিত্র আঁক।

২০. নিচের একটি সারণি দেওয়া হলো-

শ্রেণিব্যক্তি	১০-১৯	২০-২৯	৩০-৩৯	৪০-৪৯	৫০-৫৯	৬০-৬৯
গণসংখ্যা	১০	৮	১৮	১২	৮	৮

ক. ৭, ৫, ৪, ৯, ৩, ৮ উপাত্তগুলোর মধ্যক নির্ণয় কর।

খ. প্রদত্ত সারণি থেকে গড় নির্ণয় কর

গ. উপাত্তগুলোর আয়তলেখ আঁক।

২১. নিচে ৪০ জন গৃহিণীর সাপ্তাহিক সঞ্চয় (টাকায়) নিচে দেওয়া হলো:

১৫৫, ১৭৩, ১৪৬, ১৪৩, ১৬৮, ১৬০, ১৫৬, ১৪৬, ১৬২, ১৫৮, ১৫৯, ১৪৮, ১৫০, ১৪৭, ১৩২, ১৩৬, ১৫৪, ১৪০, ১৫৫, ১৪৫, ১৩৫, ১৫১, ১৪১, ১৬৩, ১৪০, ১২৫, ১২২, ১৪০, ১৩৭, ১৭৫, ১৪৫, ১৫০, ১৬৪, ১৪২, ১৫৬, ১৫২, ১৪৬, ১৪৮, ১৫৭ ও ১৬৭।

ক. উপাত্তগুলো মানব উর্ধ্বক্রমে সাজানো।

খ. মধ্যক ও প্রকুরক নির্ণয় কর।

গ. বেশি ব্যয়বান ৫ ধরে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করে গড় নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

অনুশীলনী ২.১

১। ৪০০ টাকা	২। ২৬৫০ টাকা	৩। লাভ বা ক্ষতি কিছুই হবে না	
৪। ১০৫০ টাকা	৫। ১৮০ টাকা	৬। ৯%	৭। ১২.৫%
৮। ৭৫০০ টাকা	৯। ১৪০০০ টাকা	১০। ১২৩০ টাকা	১১। ৯৬০ টাকা
১২। ১৬০০ টাকা	১৩। আসল ১২০০ টাকা, মুনাফা ১০.৫%		১৪। ৯.২%
১৫। ১১%	১৬। ১২ বছর	১৭। ৫ বছর	১৮। ৩০,০০০ টাকা

অনুশীলনী ২.২

১। গ ২। ঘ ৩। ক ৪। (১) গ, (২) ক, (৩) ঘ ৫। ১০৬৪৮ টাকা ৬। ১৫৫ টাকা	
৭। ৬২৫০ টাকা ৮। ১১৭৭২.২৫ টাকা, ১৭৭২.২৫ টাকা ৯। ৬৭,২৪,০০০ জন ১০। ১৬৭২ টাকা ১১। ক. ১০%, খ. ৪৫০০ টাকা, গ. ৩৬৩০ টাকা	

অনুশীলনী ৩

১০। ৬৩৬ বর্গমিটার ১১। ৪০২ ৩৪ মিটার (প্রায়) ১২। ৬০ মিটার ১৩। ১৮৬ বর্গমিটার	
১৪। ৫২০ ৮ বর্গমিটার ১৫। ৪৮৬৪ বর্গমিটার ১৬। ২৪ মিটার ১৭। ৩ মিটার ১৮। ২৪০৮.৬৪ গ্রাম	
১৯। ৬৭৩.৫৪৭ ঘন সে. মি. ২০। ৪৪০০০ লিটার, ৪৪০০০ কিলোগ্রাম ২১। ৭৫০ টাকা ২২। ৩৭.৫ মিটার ২৩। ৭৬৫৬ টাকা ২৪। ৫৬৯ ৫০ টাকা ২৫। ৫২টি, ১০,৪০০ টাকা ২৬। ৪৫০ ঘন সে. মি ২৭। ৫ ঘণ্টা ২০ মিনিট ২৮। ৯৭.৯২ সে. মি.	

অনুশীলনী ৪.১

- ১ (ক) $25a^2 + 70ab + 49b^2$ (খ) $36x^2 + 36x + 9$ (গ) $49p^2 - 28pq + 4q^2$
 (ঘ) $a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2$ (ঙ) $x^6 + 2x^4y + x^2y^4$ (চ) $121a^2 - 264ab + 144b^2$
 (ছ) $36x^4y^2 - 60x^3y^3 + 25x^2y^4$ (জ) $x^2 + 2xy + y^2$ (ঝ) $x^2 + 2x^2z^2 + 2abcxyz + a^2b^2c^2$
 (ঞ) $a^4x^6 - 2a^2b^2x^3y^4 + b^4y^8$ (ট) 11664 (ঠ) 367236 (ড) 356409
 (ঢ) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$ (ণ) $a^2x^2 + b^2 + 2abx + 4b + 4ax + 4$
 (ত) $x^2y^4 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xy^2z - 2xyz^2 - 2x^2yz$
 (থ) $9p^2 + 4q^2 + 25r^2 + 12pq - 20qr - 30pr$
 (দ) $x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 + 2y^2z^2 - 2z^2x^2$
 (ধ) $49a^4 + 64b^4 + 25c^4 + 112a^2b^2 - 80b^2c^2 - 70c^2a^2$
- ২ (ক) $4x^2$ (খ) $9a^2$ (গ) $36x^4$ (ঘ) $9x^2$ (ঙ) 16
- ৩। (ক) $x^2 - 49$ (খ) $25x^2 - 169$ (গ) $x^2y^2 - y^2z^2$
 (ঘ) $a^2x^2 - b^2$ (ঙ) $a^2 + 7a + 12$ (চ) $a^2x^2 + 7ax + 12$
 (ছ) $36x^2 + 24x - 221$ (জ) $a^8 - b^8$ (ঝ) $a^2x^2 - b^2y^2 - c^2z^2 + 2bcyz$
 (ঞ) $9a^2 - 45a + 50$ (ট) $25a^2 + 4b^2 - 9c^2 + 20ab$
 (ঠ) $a^2x^2 + b^2y^2 + 8ax + 8by + 2abxy + 15$
- ৪। 576 ৫। 11 ৬। 194 ৭। 168100 ১১। 36, 90 ১২। 178, 40
- ১৩। (ক) $(3p + 2q)^2 - (2p - 5q)^2$ (খ) $(8b - a)^2 - (b + 7a)^2$
 (গ) $(5x)^2 - (2x - 5y)^2$ (ঘ) $(5x)^2 - (13)^2$

અનુબીનની ૮.૨

૧ : (ક) $27x^3 + 27x^2y + 9xy^2 + y^3$

(ચ) $x^6 + 3x^4y + 3x^2y^2 + y^3$

(જ) $125p^3 + 150p^2q + 60pq^2 + 8q^3$

(ઝ) $a^6h^2 + 3a^4h^2c^2d + 3a^2hc^4d^2 + c^6d^3$

(ઙ) $216p^3 - 756p^2 + 882p - 343$

(ઠ) $a^3r^3 - 3a^2r^2bv + 3avb^2v^2 - b^3v^3$

(દ) $8p^6 - 36p^4r^2 + 54p^2r^4 - 27r^6$

(ધ) $x^9 + 6x^6 + 12x^3 + 8$

(ઘ) $8m^3 + 27n^3 + 125p^3 + 36m^2n - 60m^2p + 54mn^2 + 150mp^2 - 135n^2p + 225p^2n - 180mnp$

(ગ) $x^6 - y^6 + z^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + 3x^4z^2 + 3y^4z^2 + 3x^2z^4 - 3y^2z^4 - 6x^2y^2z^2$

(ઘ) $a^6h^6 - 3a^4h^4c^2d^2 + 3a^2h^2c^4d^4 - c^6d^6$ (ઙ) $a^6h^3 - 3a^4h^5c + 3a^2h^7c^2 - h^9c^3$

(ડ) $x^9 - 6x^6y + 12x^3y^2 - 8y^9$

(ઢ) $1331a^3 - 4356a^2b + 4752ab^2 - 1728b^3$

(ન) $x^9 + 3x^6y^3 + 3x^3y^6 + y^9$

૨ : (ક) $216x^3$

(ચ) $1000q^3$

(જ) $64y^3$

(ઝ) 216

(ઙ) $8x^3$

૩ : 152

૪ : 793

૫ : 170

૬ : 27

૭ : 0

૮ : 722

૯ : 1

૧૦ : 140

૧૧ : (ક) $a^6 + b^6$

(ચ) $a^3r^3 - h^3v^3$

(જ) $8a^3b^6$

(ઝ) $x^6 + a^3$

(ઙ) $343a^3 + 64b^3$

(ઠ) $64a^4 - 1$

(દ) $x^6 - a^6$

(ધ) $15625a^6 - 729b^6$

ଅନୁଶୀଳନୀ ୫.୭

୧୮. $(a+2)(a^2-2a+4)$ ୨୮. $(2x+7)(4x^2-14x+49)$
 ୨୯. $a(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$ ୩୯. $(2x+1)(4x^2-2x+1)$
 ୪୦. $(4a-5b)(6a^2+20ab+25b^2)$ ୫୦. $(9a-4bc^2)(81a^2+36abc^2+16b^2c^4)$
 ୫୧. $b^3(3a+4c)(9a^2-12ac+16c^2)$ ୬୦. $7(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$
 ୬୧. $3x(1+5x)(1-5x)$ ୬୦୮. $(2x+y)(2x-y)$ ୬୬୮. $3a(y+4)(y-4)$
 ୬୭୨. $(a-b+p)(a-b-p)$ ୬୭୩. $(4x+a+3)(4x-a-3)$ ୬୮୫. $a(2+p)(4-2p+p^2)$
 ୬୮୬. $2(a+2b)(a^2-2ab-4b^2)$ ୬୮୭. $(x-y+1)(x-y-1)$ ୬୮୯. $(a-1)(a-2b+1)$
 ୬୯୮. $(x+1)^2(x-1)^2$ ୭୦୮. $(x-6)^2$
 ୭୦୯. $(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$
 ୭୧୬. $(x-y+z)(x^2+y^2-2xy-xz+yz+z^2)$
 ୭୨୨. $8(2x-3)(4x^2+2xy+y^2)$ ୭୨୩. $(x+4)(x+10)$ ୭୨୫. $(x+15)(x-8)$
 ୭୨୬. $(x-26)(x-25)$ ୭୨୭. $(a+3b)(a+4b)$ ୭୨୯. $(p+10q)(p-8q)$
 ୭୩୮. $(x-8y)(x+5y)$ ୭୩୯. $(x^2-x+8)(x^2-x-5)$ ୭୪୦. $(a^2+b^2+4)(a^2+b^2-22)$
 ୭୪୧. $(a+2)(a-2)(a+5)(a+9)$ ୭୪୨. $(x+a+b)(x+2a+3b)$ ୭୪୩. $(2x+3)(3x-5)$
 ୭୪୫. $(x+a+1)(x-a-2)$ ୭୪୬. $(x+4)(3x-1)$ ୭୪୭. $(3x+2)(x-6)$
 ୭୪୮. $(x-7)(2x+5)$ ୭୪୯. $(x-2y)(2x-3y)$ ୭୫୦. $(2y-x)(7x^2-10xy-4y^2)$
 ୭୫୧. $(2p+3q)(5p-2q)$ ୭୫୨. $(x+y-2)(2x+2y+1)$ ୭୫୩. $(x+a)(ax+1)$
 ୭୫୪. $(3x-4y)(5x+3y)$ ୭୫୫. $(a-2b)(a^2-ab+b^2)$

ଅନୁଶୀଳନୀ ୫.୫

୧୦ । କ

୧୧(୧) (କ) ୧୧(୨) (ଖ) ୧୧(୩) : (ଗ) ୧୨(୧) (କ) ୧୨(୨) : (ଖ) ୧୨(୩) (ଖ)

୧୩ । 18a²c² ୧୫ 5x²y²a³b² ୧୯ 3x²y²z³a³ ୧୬ 6 ୧୭ (x-3) ୧୮ 2(x+y)

୧୯ ab(a²+ab+b²) ୨୦ a(a+2) ୨୧ a²b⁴c³ ୨୨ 30a²b³c³ ୨୩ 60x⁴y⁴z²

୨୫ 72a²b²c³d³ ୨୬ (x²-1)(x+2) ୨୭ (x+2)²(x³-8) ୨୮ (2x-1)(3x+1)(x+2)

୨୯ (a-h)²(a+h)³(a²-ah+h²)² ୩୦ । (କ) ୫ (ଖ) 2√5 (ଗ) ୫√5

ଅନୁଶୀଳନୀ ୫.୬

୧ । (କ) $\frac{4yz^2}{9x^3}$ (ଖ) $\frac{36x}{y}$ (ଗ) $\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)}$ (ଘ) $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$ (ଙ) $\frac{x-1}{x+5}$

(ଚ) $\frac{x-3}{x-5}$ (ଛ) $\frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)^2}$ (ଜ) $\frac{a-h}{a+h} \cdot \frac{b-c}{b-c}$

୨ । (କ) $\frac{x^2z}{xyz}, \frac{xy^2}{xyz}, \frac{yz^2}{xyz}$ (ଖ) $\frac{z(x-y)}{xyz}, \frac{x(y-z)}{xyz}, \frac{y(z-x)}{xyz}$

$$(୩) \frac{x^4(x+y) - xy(x-y) - 2(x-y)}{x(x^2-y^2) \cdot x(x^2-y^2) \cdot x(x^2-y^2)}$$

$$(୩) \frac{(x+y)(x^3+y^3) - (x-y)^3 - (x-y)^2(x^3+y^3) - (x-y)^2(x^3+y^3)}{(x-y)^2(x^3+y^3) \cdot (x-y)^2(x^3+y^3) \cdot (x-y)^2(x^3+y^3)}$$

$$(୫) \frac{a(a^3-b^3) - b((a-b)(a^3+b^3) - c(a^3+b^3))}{a^3+b^3(a^3-b^3) \cdot (a^3+b^3)(a^3-b^3) \cdot (a^3+b^3)(a^3-b^3)}$$

$$(୬) \frac{(x-4)(x-5) - (x-2)(x-5) - (x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) \cdot (x-2)(x-3)(x-4)(x-5) \cdot (x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}$$

$$(୭) \frac{a^2(a-b) - a^2(b-c) - b^2(c-a)}{a^2b^2c^2 \cdot a^2b^2c^2 \cdot a^2b^2c^2}$$

$$(୮) \frac{(x-y)(y+z)(z+x) - (y-z)(x+y)(z+x) - (z-x)(x+y)(y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x) \cdot (x+y)(y+z)(z+x) \cdot (x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$୭. (କ) \frac{a^2+2ab-b^2}{ab} \quad (ଖ) \frac{a^2+b^2+c^2}{abc} \quad (ଗ) \frac{3xyz - x^2y - y^2z - z^2x}{xyz}$$

$$(୪) \frac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2} \quad (୫) \frac{3x^2-18x+26}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} \quad (୬) \frac{3a^4+a^2b^2-b^4}{(a^3+b^3)(a^3-b^3)}$$

$$(୭) \frac{2}{x-2} \quad (୮) \frac{x^6+2x^4+x^2+6}{x^2-1}$$

$$୮. (କ) \frac{a+3a-a^2}{a^2-9} \quad (ଖ) \frac{x^2+y^2}{xy(x^2-y^2)} \quad (ଗ) \frac{2}{x^4+x^2+1} \quad (ଘ) \frac{8ab}{a^2-16b^2} \quad (ଙ) \frac{2y}{x^2-y^2}$$

৫ (ক) 0 (খ) $\frac{x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx}{(y+z)(x+y)(z+x)}$ (গ) 0 (ঘ) 0

(ঙ) $\frac{6xy^2}{x^2 + y^2 + 4x^2 + y^2}$ (চ) $\frac{12x^4}{x^6 + 64}$ (ছ) $\frac{8x^4}{x^8 + 1}$ (জ) $\frac{2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$

(ঝ) $\frac{3a-2b}{a^2 + b^2 - c^2 - 2ab}$ (ঞ) $\frac{2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2}{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$

অনুশীলনী ৫.২

১৩ (ক) $\frac{15a^2b^4c^4}{x^2y^2z^4}$ (খ) $\frac{32a^2b^2y^3z^3}{45x^4}$ (গ) 1 (ঘ) $\frac{x(x-1)^3}{(x+1)^4(x^2-4x+5)}$ (ঙ) $\frac{x^2+y^2}{(x^2-xy+y^2)^2}$

(চ) $\frac{(x-h)(x-h)}{hx}$ (ছ) $\frac{(x-2)^2(x+4)}{(x-3)^2(x+3)}$ (জ) $a(a-h)$ (ঝ) $(x-1)$

১৪ (ক) $\frac{45zx^3}{8ay^2}$ (খ) $\frac{27hc}{64a}$ (গ) $\frac{9a^2b^2c^2}{x^2y^2z^2}$ (ঘ) $\frac{x}{x+1}$ (ঙ) $\frac{(a+h)^2}{(a-h)^3}$ (চ) $(x-y)^2$

(ছ) $(a+b)^2$ (জ) $\frac{(x-1)(x-3)}{(x+2)(x+4)}$ (ঝ) $\frac{(x-7)}{(x+6)}$

১৫ (ক) $\frac{x^2-y^2}{x^4y^2}$ (খ) $-\frac{1}{x^2}$ (গ) $\frac{-2ca}{(a+h)(a+b+c)}$ (ঘ) $\frac{a}{(1-a^2)(1+a+a^2)}$

(ঙ) $\frac{4x^2}{x^2y^2}$ (চ) 1 (ছ) 1 (জ) $\frac{1}{2ab}$ (ঝ) $\frac{a-b}{x-y}$ (ঞ) $\frac{b}{a}$

১৬ (ক) $\frac{1}{x-3}$ (খ) $\frac{3x^2+y^2}{2xy}$ (গ) 1 (ঘ) (a^2+b^2)

অনুশীলনী ৬.১

(ক) ১। (3, 1) ২। (2, 1) ৩। (2, 2) ৪। (1, 1) ৫। (2, 3)

৬। $(a+h, b-a)$ ৭। $\begin{pmatrix} ab & ab \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$ ৮। $\begin{pmatrix} ah & ah \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$

৯। (1, 1) ১০। (2, 3) ১১। (2, 1) ১২। (2, 3)

(খ) ১৩। (5, 1) ১৪। (2, 1) ১৫। (3, 1) ১৬। (3, 2) ১৭। (2, 3) ১৮। (2, 3)

১৯। (4, 2) ২০। $\begin{pmatrix} h^2+ac & ah-c \\ a^2-b & a^2+b \end{pmatrix}$ ২১। (4, 3) ২২। (6, -2) ২৩। (2, 1)

২৪। (2, 3) ২৫। (6, 2) ২৬। $(a, -b)$

অনুশীলনী ৬.২

১০। 60, 40 ১১। 120, 40 ১২। 11, 13 ১৩। পিতার 65 বছর ও পুত্রের বয়স 25 বছর

১৪। ভগ্নাংশটি $\frac{3}{4}$ ১৫। প্রকৃত ভগ্নাংশটি $\frac{3}{11}$ ১৬। 37 বা 73 ১৭। দৈর্ঘ্য ৬০ মিটার এবং প্রস্থ 25 মিটার

১৮। খাতার মূল্য 16 টাকা ও পেনসিলের মূল্য 6 টাকা

১৯। 4000 টাকা ও 1000 টাকা।

২০। (ক) (4, 2) (খ) (3, 2) (গ) (5, 3) (ঘ) (5, 2) (ঙ) (১, ১) (চ) (2, 1)

অনুশীলনী ৭

- ১৬। (ক) $\{5, 7, 9, 11, 13\}$ (খ) $\{2, 3\}$
 (গ) $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33\}$ (ঘ) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
- ১৭। (ক) $\{x : x \text{ স্বাভাবিক সংখ্যা এবং } 2 < x < 9\}$
 (খ) $\{x : x, 4 \text{ -এর গুণিতক এবং } x < 28\}$
 (গ) $\{x : x \text{ মৌলিক সংখ্যা এবং } 5 < x < 19\}$
- ১৮। (ক) $\{m, n\}, \{m\}, \{n\}, \emptyset$: ৪টি
 (খ) $\{5, 10, 15\}, \{5, 10\}, \{5, 15\}, \{10, 15\}, \{5\}, \{10\}, \{15\}, \emptyset$: ৮টি
- ১৯। (ক) $\{1, 2, 3, a\}$ (খ) $\{a\}$ (গ) $\{2\}$ (ঘ) $\{1, 2, 3, a, b\}$ (ঙ) $\{2, a\}$
২১. $\{1, 3, 5, 7, 21, 35\}$

অনুশীলনী ৮.১

- ১৮। ৩৪০ বর্গ সে.মি.
 ১৯। ২৫৩.৫ বর্গ সে.মি.

অনুশীলনী ১০.৩

- ১২ (ক) 62.8 সে.মি (প্রায়) (খ) 87.92 সে.মি (প্রায়) (গ) 131.88 সে.মি (প্রায়)
 ১৩ (ক) 452.16 বর্গ সে.মি (প্রায়) (খ) 907.46 বর্গ সে.মি (প্রায়) (গ) 1384.74 বর্গ সে.মি (প্রায়)
 ১৪ 124.5 সে.মি . 886.5 সে.মি (প্রায়) ১৫ 4752 টাকা ১৭ 598.86 বর্গ সে.মি (প্রায়)
 ১৮ 1466.29 বর্গ সে.মি.

অনুশীলনী ১১

- ১।(ঘ) ২।(ক) ৩।(ঘ) ৪।(গ) ৫।(খ) ৬।(ক) ৭।(খ)
 ৮ (গ) ৯।(ক) ৭৫ (খ) ৭৫.০২ (গ) ০.০২ ১০ ২৩.৩১ প্রায় ১১ ২২৩০.৩৩ টাকা
 ১২ গড় ১৫০.৪৩ টাকা, মধ্যক ১৫০ টাকা, প্রচুরক ১৪০ ও ১৫৬ টাকা ১৩ . গড় ১১.৪৪ বছর
 ১৪ গড় ৬৬.৬৫ টাকা ১৫।(ক) ৭ (খ) ৫৫.৮৩ (প্রায়) ১৬।(খ) ৬৯.৭
 ১৮ বাংলায় ১৮০ জন, ইংরেজিতে ৬০ জন, গণিতে ১০০ জন, বিজ্ঞানে ১২০ জন, ধর্মে ১৬০ জন,
 সঙ্গীতে ১০০ জন।

পরিশিষ্ট

অষ্টম শ্রেণির গণিত বিষয়ের দ্বিতীয়, চতুর্থ, পঞ্চম, ষষ্ঠ ও অষ্টম অধ্যায়ের সাথে সম্পর্কিত কিছু অতিরিক্ত বিষয়বস্তু সংযুক্তি হিসেবে যুক্ত করা হয়েছে। কারণ ২০২৫ এ অষ্টম শ্রেণিতে অধ্যয়নরত শিক্ষার্থীরা পূর্বতন শ্রেণিতে (ষষ্ঠ ও সপ্তম শ্রেণি) 'জাতীয় শিক্ষাক্রম ২০২২' অনুযায়ী অধ্যয়ন করেছে। 'জাতীয় শিক্ষাক্রম ২০২২' অনুযায়ী ষষ্ঠ ও সপ্তম শ্রেণিতে উক্ত বিষয়বস্তু অন্তর্ভুক্ত ছিল না। তাই শিখনের ধারাবাহিকতা ও কার্যকর শিখনের জন্য উক্ত বিষয়বস্তু সংযুক্ত করা হয়েছে। উল্লেখ্য যে অষ্টম শ্রেণির গণিতের শিখনফল অনুযায়ী ধারাবাহিক ও সাময়িক মূল্যায়ন অনুষ্ঠিত হবে।

দ্বিতীয় অধ্যায়ের সংযুক্তি

একজন দোকানদার ১ ডজন বলপেন ৬০ টাকায় ক্রয় করে ৭২ টাকায় বিক্রয় করলেন। এখানে দোকানদার ১২টি বলপেন ৬০ টাকায় ক্রয় করলেন ফলে ১টি বলপেনের ক্রয়মূল্য $\frac{৬০}{১২}$ টাকা বা ৫ টাকা। আবার তিনি ১২টি বলপেন ৭২ টাকায় বিক্রয় করলেন ফলে ১টি বলপেনের বিক্রয়মূল্য $\frac{৭২}{১২}$ টাকা বা ৬ টাকা। ১টি বলপেনের ক্রয়মূল্য ৫ টাকা ও বিক্রয়মূল্য ৬ টাকা।

কোনো জিনিস যে মূল্যে ক্রয় করা হয়, তাকে **ক্রয়মূল্য** এবং যে মূল্যে বিক্রয় করা হয়, তাকে **বিক্রয়মূল্য** বলে। ক্রয়মূল্যের চেয়ে বিক্রয়মূল্য বেশি হলে লাভ হয়।

লাভ = বিক্রয়মূল্য – ক্রয়মূল্য = (৬ টাকা – ৫ টাকা) বা ১ টাকা।

এখানে দোকানদার প্রতিটি বলপেনে ১ টাকা করে লাভ করলেন।

আবার মনে করি, একজন কলাবিক্রেতা ১ হালি কলা ২০ টাকায় ক্রয় করে ১৮ টাকায় বিক্রয় করলেন। ক্রয়মূল্যের চেয়ে বিক্রয়মূল্য কম হলে **ক্ষতি বা লোকসান** হয়।

ক্ষতি = ক্রয়মূল্য – বিক্রয়মূল্য = (২০ – ১৮) টাকা = ২ টাকা

এখানে কলাবিক্রেতার প্রতি হালিতে ২ টাকা করে ক্ষতি হলো।

মনে করি, একজন কাপড় ব্যবসায়ী মার্কেটের একটি দোকান ভাড়া নিয়ে ৫ জন কর্মচারী নিয়োগ দিলেন। তিনি দোকানের ভাড়া, কর্মচারীদের বেতন দোকানের বিদ্যুৎ বিল ও অন্যান্য আনুষঙ্গিক খরচ বহন করেন। এ সকল খরচ তাঁর কাপড়ের ক্রয়মূল্যের সাথে যোগ করা হয়।

এই যোগফলকেই মোট খরচ বলে। যদি ঐ কাপড় ব্যবসায়ী মাসে ২,০০,০০০ টাকা ব্যবসায় খাটিয়ে ২,৫০,০০০ টাকায় ঐ কাপড় বিক্রয় করেন, তবে তাঁর (২,৫০,০০০ – ২,০০,০০০) টাকা বা ৫০,০০০ টাকা লাভ হবে। আবার যদি উক্ত মাসে ১,৮০,০০০ টাকার কাপড় বিক্রয়

করে থাকেন তাহলে তাঁর (২,০০,০০০ - ১,৮০,০০০) টাকা বা ২০,০০০ টাকা ক্ষতি বা লোকসান হবে।

লক্ষ করি :

$$\bullet \text{ লাভ} = \text{বিক্রয়মূল্য} - \text{ক্রয়মূল্য}$$

$$\text{বা, বিক্রয়মূল্য} = \text{ক্রয়মূল্য} + \text{লাভ}$$

$$\text{বা, ক্রয়মূল্য} = \text{বিক্রয়মূল্য} - \text{লাভ}$$

$$\bullet \text{ ক্ষতি} = \text{ক্রয়মূল্য} - \text{বিক্রয়মূল্য}$$

$$\text{বা, ক্রয়মূল্য} = \text{বিক্রয়মূল্য} + \text{ক্ষতি}$$

$$\text{বা, বিক্রয়মূল্য} = \text{ক্রয়মূল্য} - \text{ক্ষতি}$$

লাভ বা ক্ষতিকো আমরা শতকরায় প্রকাশ করতে পারি যেমন, উপরের আলোচনায় ৫ টাকায় বলপেন কিনে ৬ টাকায় বিক্রয় করায় ১ টাকা লাভ হয়।

অর্থাৎ, ৫ টাকায় লাভ হয় ১ টাকা

$$\therefore 1 \text{ " " " } \frac{1}{5} \text{ "}$$

$$\therefore 100 \text{ " " " } \frac{1 \times 100}{5} = 20 \text{ টাকা}$$

\therefore নির্ণেয় লাভ ২০%।

অনুরূপভাবে, কমলাবিক্রেতা ২০ টাকার কমলা কিনে ১৮ টাকায় বিক্রয় করায় ২ টাকা ক্ষতি হয়েছে

অর্থাৎ, ২০ টাকায় ক্ষতি হয় ২ টাকা

$$\therefore 1 \text{ " " " } \frac{2}{20} \text{ "}$$

$$\therefore 100 \text{ " " " } \frac{2 \times 100}{20} = 10 \text{ টাকা}$$

\therefore নির্ণেয় ক্ষতি ১০%

উদাহরণ ১। একজন কমলাবিক্রেতা প্রতি শত কমলা ১০০০ টাকায় কিনে ১২০০ টাকায় বিক্রয় করলেন। তাঁর কত লাভ হলো?

সমাধান : ১০০টি কমলার ক্রয়মূল্য ১০০০ টাকা

এবং ১০০টি " বিক্রয়মূল্য ১২০০ "

এখানে ক্রয়মূল্যের চেয়ে বিক্রয়মূল্য বেশি হওয়ায় লাভ হয়েছে

অর্থাৎ, লাভ = বিক্রয়মূল্য - ক্রয়মূল্য

$$= ১২০০ \text{ টাকা} - ১০০০ \text{ টাকা} = ২০০ \text{ টাকা}$$

\therefore নির্ণেয় লাভ ২০০ টাকা।

উদাহরণ ২। একজন দোকানদার ৫০ কেজির ১ বস্তা চাল ১৬০০ টাকায় কিনলেন চালের দাম কমে যাওয়ায় ১৫০০ টাকায় বিক্রয় করেন তাঁর কত ক্ষতি হলো?

সমাধান : এখানে, ১ বস্তা চালের ক্রয়মূল্য ১৬০০ টাকা

এবং ১ " " বিক্রয়মূল্য ১৫০০ "

এখানে ক্রয়মূল্যের চেয়ে বিক্রয়মূল্য কম হওয়ায় ক্ষতি হয়েছে।

অর্থাৎ, ক্ষতি = ক্রয়মূল্য - বিক্রয়মূল্য = ১৬০০ টাকা - ১৫০০ টাকা = ১০০ টাকা

∴ নির্ণেয় ক্ষতি ১০০ টাকা।

উদাহরণ ৩। ৭৫ টাকায় ১৫টি বলপেন কিনে ৯০ টাকায় বিক্রয় করলে শতকরা কত লাভ হবে?

সমাধান : এখানে, ১৫টি বলপেনের ক্রয়মূল্য ৭৫ টাকা

এবং ১৫টি " বিক্রয়মূল্য ৯০ টাকা

এখানে ক্রয়মূল্যের চেয়ে বিক্রয়মূল্য বেশি হওয়ায় লাভ হয়েছে

অর্থাৎ, লাভ = বিক্রয়মূল্য - ক্রয়মূল্য

= ৯০ টাকা - ৭৫ টাকা = ১৫ টাকা

∴ ৭৫ টাকায় লাভ হয় ১৫ টাকা

১ " " " $\frac{১৫}{৭৫}$ "

∴ ১০০ " " " $\frac{১৫ \times ১০০}{৭৫} = ২০$ টাকা

∴ নির্ণেয় লাভ ২০%।

উদাহরণ ৪। একটি ছাগল ১০% ক্ষতিতে বিক্রয় করা হলো। বিক্রয়মূল্য ৪৫০ টাকা বেশি হলে ৫%

লাভ হতো। ছাগলটির ক্রয়মূল্য কত?

সমাধান : মনে করি, ছাগলটির ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

১০% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য (১০০ - ১০) টাকা = ৯০ টাকা

৫% লাভে বিক্রয়মূল্য (১০০ + ৫) টাকা = ১০৫ টাকা

৫% লাভে বিক্রয়মূল্য - ১০% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য

= (১০৫ - ৯০) টাকা

= ১৫ টাকা

∴ বিক্রয়মূল্য ১৫ টাকা বেশি হলে ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

" ১ " " " " $\frac{১০০}{১৫}$ "

∴ " ৪৫০ " " " " $\frac{১০০ \times ৪৫০}{১৫}$ "

= ৩০০০ টাকা

∴ ছাগলটির ক্রয়মূল্য ৩০০০ টাকা

উদাহরণ ৫। নাবিল মিষ্টির দোকান থেকে প্রতি কেজি ২৫০ টাকা হিসাবে ২ কেজি সন্দেশ ক্রয় করলো। ভ্যাটের হার ৪ টাকা হলে, সন্দেশ ক্রয় বাবদ সে দোকানিকে কত টাকা দেবে?

সমাধান : ১ কেজি সন্দেশের দাম ২৫০ টাকা

$$\therefore \quad ২ \quad " \quad " \quad " \quad (২৫০ \times ২) \text{ টাকা} \\ = ৫০০ \text{ টাকা}$$

১০০ টাকার ভ্যাট ৪ টাকা

$$\therefore \quad ১ \quad " \quad " \quad \frac{৪}{১০০} \quad " \\ ৫০০ \quad " \quad " \quad \frac{৪ \times ৫০০}{১০০} \quad " = ২০ \text{ টাকা}$$

∴ নাবিল সন্দেশ ক্রয় বাবদ দোকানিকে দেবে (৫০০ + ২০) টাকা = ৫২০ টাকা

লক্ষণীয় কোনো দ্রব্যের ক্রয়মূল্যের সাথে নির্দিষ্ট হারে প্রদানকৃত করকে মূল্য সংযোজন কর বা ভ্যাট (Value Added Tax) বলে।

চতুর্থ অধ্যায়ের সংযুক্তি

বীজগণিতীয় প্রতীক দ্বারা প্রকাশিত যেকোনো সাধারণ নিয়ম বা সিদ্ধান্তকে বীজগণিতীয় সূত্র বা সংক্ষেপে সূত্র বলা হয়। আমরা বিভিন্ন ক্ষেত্রে সূত্র ব্যবহার করে থাকি। এ অধ্যায়ে প্রথম চারটি সূত্র এবং এ চারটি সূত্রের সাহায্যে অনুসিদ্ধান্ত নির্ণয়ের পদ্ধতি দেখানো হয়েছে। এ ছাড়া বীজগণিতীয় সূত্র ও অনুসিদ্ধান্ত প্রয়োগ করে বীজগণিতীয় রাশির মান নির্ণয় ও উৎপাদকে বিশ্লেষণ উপস্থাপন করা হয়েছে।

বীজগণিতীয় সূত্রাবলি

সূত্র ১। $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

প্রমাণ: $(a + b)^2$ এর অর্থ $(a + b)$ কে $(a + b)$ দ্বারা গুণ।

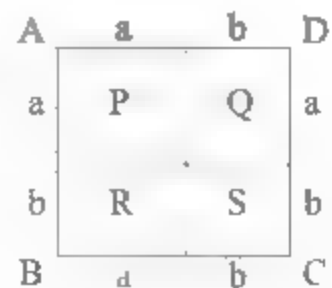
$$\therefore (a + b)^2 = (a + b)(a + b) \\ = a(a + b) + b(a + b) \text{ [বহুপদী রাশিকে বহুপদী রাশি দ্বারা গুণ]} \\ = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$

$$\therefore (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

দুইটি রাশির যোগফলের বর্গ = ১ম রাশির বর্গ + ২ × ১ম রাশি × ২য় রাশি + ২য় রাশির বর্গ

সূত্রটির জ্যামিতিক ব্যাখ্যা : ABCD একটি বর্গক্ষেত্র যার

AB বাহু = $a + b$ এবং BC বাহু = $a + b$



∴ ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (বাহুর দৈর্ঘ্য)^২ = $(a + b)^2$

বর্গক্ষেত্রটিকে P, Q, R, S চারটি ভাগে ভাগ করা হয়েছে।

এখানে P ও S বর্গক্ষেত্র এবং Q ও R আয়তক্ষেত্র।

আমরা জানি, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (দৈর্ঘ্য)^২ এবং

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

অতএব, P এর ক্ষেত্রফল = $a \times a = a^2$

Q এর ক্ষেত্রফল = $a \times b = ab$

R এর ক্ষেত্রফল = $a \times b = ab$

S এর ক্ষেত্রফল = $b \times b = b^2$

এখন, ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (P + Q + R + S) এর ক্ষেত্রফল

∴ $(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

∴ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

অনুসিদ্ধান্ত ১। $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

আমরা জানি $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

বা, $(a + b)^2 - 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$ [উভয়পক্ষ থেকে 2ab বিয়োগ করে]

বা, $(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$

∴ $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

লক্ষণীয় : একটি সূত্র থেকে যদি অন্য একটি সূত্র তৈরি করা যায় তবে নতুন সূত্রটিকে অনুসিদ্ধান্ত বলে।

উদাহরণ ১। $(m + n)$ এর বর্গ নির্ণয় করো। উদাহরণ ২। $(3x + 4)$ এর বর্গ নির্ণয়

সমাধান: $(m + n)$ এর বর্গ = $(m + n)^2$ করো।

$$\begin{aligned} &= (m)^2 + 2 \times m \times n + (n)^2 && \text{সমাধান } (3x + 4) \text{ এর বর্গ } (3x + 4)^2 \\ &= m^2 + 2mn + n^2 && = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 4 + (4)^2 \\ & && = 9x^2 + 24x + 16 \end{aligned}$$

সূত্র ২। $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

প্রমাণ: $(a - b)^2$ এর অর্থ $(a - b)$ কে $(a - b)$ দ্বারা গুণ।

∴ $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$

= $a(a - b) - b(a - b)$ [বহুপদী রাশিকে বহুপদী রাশি দ্বারা গুণ]

$$= a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - ab - ab + b^2$$

∴ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

দুইটি রাশির বিয়োগফলের বর্গ = ১ম রাশির বর্গ - ২ × ১ম রাশি × ২য় রাশি + ২য় রাশির বর্গ

লক্ষ করি : দ্বিতীয় সূত্রটি প্রথম সূত্রের সাহায্যেও নির্ণয় করা যায়

আমরা জানি $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

এখন $(a - b)^2 = \{(a + (-b))\}^2 = a^2 + 2 \times a \times (-b) + (-b)^2$ [b এর পরিবর্তে -b বসিয়ে]
 $= a^2 - 2ab + b^2$

অনুসিদ্ধান্ত ২। $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$

আমরা জানি $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

বা, $(a - b)^2 + 2ab = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab$ [উভয়পক্ষে 2ab যোগ করে]

বা, $(a - b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$

$$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$$

অনুসিদ্ধান্ত ৩। $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$

আমরা জানি $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$= a^2 + b^2 - 2ab + 4ab \text{ [যেহেতু } 2ab = -2ab + 4ab]$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 + 4ab$$

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$$

অনুসিদ্ধান্ত ৪। $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

আমরা জানি $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$= a^2 + b^2 + 2ab - 4ab \text{ [যেহেতু } -2ab = 2ab - 4ab]$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab$$

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$$

উদাহরণ ৩। $(5x - 3y)$ এর বর্গ নির্ণয়

করো।

সমাধান : $(5x - 3y)$ এর বর্গ = $(5x - 3y)^2$

$$= (5x)^2 - 2 \times 5x \times 3y + (3y)^2$$

$$= 25x^2 - 30xy + 9y^2$$

উদাহরণ ৫। $a + b = 7$ এবং $ab = 9$

হলে, $a^2 + b^2$ এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান :

উদাহরণ ৪ বর্গের সূত্র প্রয়োগ করে ৭৪ এর

বর্গ নির্ণয় করো।

সমাধান: $(98)^2 = (100 - 2)^2$

$$= 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2$$

$$= 10000 - 400 + 4 = 9604$$

উদাহরণ ৬। $a + b = 5$ এবং $ab = 6$

হলে, $(a - b)^2$ এর মান নির্ণয় করো

সমাধান :

$$\begin{array}{ll}
 \text{আমরা জানি, } a^2 + b^2 & (a+b)^2 - 2ab \quad \text{আমরা জানি, } (a-b)^2 & (a+b)^2 - 4ab \\
 & = (7)^2 & & = (5)^2 - \\
 2 \times 9 & & 4 \times 6 & \\
 & 49 - & & = 25 - \\
 18 & & 24 & \\
 & = 31 & & = 1
 \end{array}$$

উদাহরণ ৭। $p - \frac{1}{p}$ ৪ হলে, প্রমাণ কর যে, $p^2 + \frac{1}{p^2}$ ৬৬

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান: } p^2 + \frac{1}{p^2} &= \left(p - \frac{1}{p}\right)^2 + 2 \times p \times \frac{1}{p} \quad [\text{যেহেতু } a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab] \\
 &= (4)^2 + 2 = 16 + 2 = 18 \quad (\text{প্রমাণিত})
 \end{aligned}$$

উদাহরণ ৮ সরল কর $(2x+3y)^2 - 2(2x+3y)(2x-5y) + (2x-5y)^2$

সমাধান : ধরি, $2x+3y = a$ এবং $2x-5y = b$

$$\begin{aligned}
 \text{প্রদত্ত রাশি} &= a^2 - 2ab + b^2 \\
 &= (a-b)^2 \\
 &= \{(2x+3y) - (2x-5y)\}^2 \quad [a \text{ ও } b \text{ এর মান বসিয়ে}] \\
 &= \{2x+3y-2x+5y\}^2 = (8y)^2 = 64y^2
 \end{aligned}$$

সূত্র ৩। $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$\begin{aligned}
 \text{প্রমাণ: } (a+b)(a-b) &= a(a-b) + b(a-b) \\
 &= a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2 \\
 \therefore (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2
 \end{aligned}$$

উদাহরণ ৯ সূত্রের সাহায্যে $3x+2y$ কে $3x-2y$ দ্বারা গুণ করো

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান : } (3x+2y)(3x-2y) \\
 &= (3x)^2 - (2y)^2 = 9x^2 - 4y^2
 \end{aligned}$$

সূত্র ৪। $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

$$\begin{aligned}
 \text{প্রমাণ : } (x+a)(x+b) &= x(x+b) + a(x+b) \\
 &= x^2 + xb + ax + ab \\
 \therefore (x+a)(x+b) &= x^2 + (a+b)x + ab
 \end{aligned}$$

উদাহরণ ১০। $a+3$ কে $a+2$ দ্বারা গুণ করো

$$\begin{aligned}
 \text{প্রমাণ: } (a+3)(a+2) &= a^2 + (3+2) \times a + 3 \times 2 \\
 &= a^2 + 5 \times a + 3 \times 2 \\
 &= a^2 + 5a + 6
 \end{aligned}$$

পঞ্চম অধ্যায়ের সংযুক্তি

ভগ্নাংশ অর্থ ভাঙা অংশ। আমরা দৈনন্দিন জীবনে একটি সম্পূর্ণ জিনিসের সাথে এর অংশও ব্যবহার করি। তাই ভগ্নাংশ, গণিতের একটি অপরিহার্য বিষয়। পাটিগণিতীয় ভগ্নাংশের মতো বীজগণিতীয় ভগ্নাংশেও লঘুকরণ ও সাধারণ হরবিশিষ্টকরণ গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা রাখে। পাটিগণিতীয় ভগ্নাংশের অনেক জটিল সমস্যা বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের মাধ্যমে সহজে সমাধান করা যায়। কাজেই শিক্ষার্থীদের বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ সম্পর্কে সুস্পষ্ট ধারণা থাকা প্রয়োজন।

ভগ্নাংশ

আবার একটি কেক সমান দুইভাগে ভাগ করে এক ভাগ তার বোন টিনাকে দিল। তাহলে তাদের প্রত্যেক পেলে কেকটির অর্ধেক, অর্থাৎ $\frac{1}{2}$ অংশ। এই $\frac{1}{2}$ একটি ভগ্নাংশ।

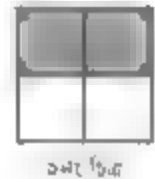
আবার ধরা যাক, টিনা একটি বৃত্তের ৪ ভাগের ৩ ভাগ কালো রং করলো। তাহলে, তার রং করা হলো সম্পূর্ণ বৃত্তটির $\frac{3}{4}$ অংশ। এখানে $\frac{3}{4}$ এগুলো পাটিগণিতীয় ভগ্নাংশ যাদের লব ১, ৩ এবং হর ২, ৪। যদি কোনো ভগ্নাংশের শুধু লব বা শুধু হর বা উভয়কে বীজগণিতীয় প্রতীক বা রাশি দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তবে তা হবে বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ। যেমন, $\frac{x}{4}, \frac{5}{x}, \frac{x}{x+1}, \frac{2x}{x-3}, \frac{x}{x+1}$ ইত্যাদি বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ।

সমতুল ভগ্নাংশ

লক্ষ করি, দুইটি সমান বর্গাকার ক্ষেত্র যেমন, ১নং চিত্রে দুই ভাগের এক ভাগ, অর্থাৎ $\frac{1}{2}$ অংশ কালো রং করা হয়েছে এবং ২নং চিত্রে চার ভাগের দুই ভাগ, অর্থাৎ $\frac{2}{4}$ অংশ কালো রং করা হয়েছে। কিন্তু দেখা যায়, দুই চিত্রের মোট কালো রং করা অংশ সমান।



১নং চিত্র



২নং চিত্র

অতএব, আমরা লিখতে পারি, $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$ । একইভাবে, $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$ ।

এভাবে $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \dots$ এগুলো পরস্পর সমতুল ভগ্নাংশ।

একইভাবে বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে, $\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c} = \frac{ac}{bc}$ [লব ও হরকে c দ্বারা গুণ করে যেখানে, $c \neq 0$] আবার, $\frac{ac}{bc} = \frac{ac \div c}{bc \div c} = \frac{a}{b}$ [লব ও হরকে $(c \neq 0)$ দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore \frac{a}{b}$ এবং $\frac{ac}{bc}$ পরস্পর সমতুল ভগ্নাংশ।

লক্ষণীয় যে, কোনো ভগ্নাংশের লব ও হরকে শূন্য ছাড়া একই রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করলে, ভগ্নাংশের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না।

ভগ্নাংশের লঘুকরণ

কোনো ভগ্নাংশের লঘুকরণের অর্থ হলো ভগ্নাংশটিকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করা। এ জন্য লব ও হরকে এদের সাধারণ গুণনীয়ক বা উৎপাদক দ্বারা ভাগ করা হয়। কোনো ভগ্নাংশের লব ও হরের মধ্যে কোনো সাধারণ গুণনীয়ক বা উৎপাদক না থাকলে এরূপ ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারের ভগ্নাংশ বলা হয়।

উদাহরণ ১। $\frac{4a^2bc}{6ab^2c}$ কে লঘুকরণ করো।

$$\text{সমাধান : } \frac{4a^2bc}{6ab^2c} = \frac{2 \times 2 \times a \times a \times b \times c}{2 \times 3 \times a \times b \times b \times c} = \frac{2 \times a}{3 \times b} = \frac{2a}{3b}$$

উদাহরণ ২। $\frac{2a^2+3ab}{4a^2-9b^2}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করো।

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } \frac{2a^2+3ab}{4a^2-9b^2} &= \frac{2a^2+3ab}{(2a)^2-(3b)^2} \\ &= \frac{a(2a+3b)}{(2a+3b)(2a-3b)} = \frac{a}{(2a-3b)} [\because x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)] \end{aligned}$$

উদাহরণ ৩। লঘুকরণ করো : $\frac{x^2+5x+6}{x^2+x+2}$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } \frac{x^2+5x+6}{x^2+x+2} &= \frac{x^2+2x+3x+6}{x^2+x+2x+2} \\ &= \frac{x(x+2)+3(x+2)}{(x+2)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2} \end{aligned}$$

সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশ

সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশকে সমহরবিশিষ্ট ভগ্নাংশও বলে। এক্ষেত্রে প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলোর হর সমান করতে হয়। $\frac{a}{2b}$ ও $\frac{m}{3n}$ ভগ্নাংশ দুইটি বিবেচনা করি। ভগ্নাংশ দুইটির হর $2b$ এবং $3n$

এদের ল.সা.গু. $6bn$.

অতএব, দুইটি ভগ্নাংশেরই হর $6bn$ করতে হবে।

$$\begin{aligned} \text{এখানে, } \frac{a}{2b} &= \frac{a \times 3n}{2b \times 3n} [\because 6bn + 2b = 3n] \\ &= \frac{3an}{6bn} \\ &= \frac{6bn}{6bn} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{এবং } \frac{m}{3n} &= \frac{m \times 2b}{3n \times 2b} [\because 6bn + 3n = 2b] \\ &= \frac{2bm}{6bn} \end{aligned}$$

\therefore সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশ দুইটি $\frac{3an}{6bn}$, $\frac{2bm}{6bn}$

সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে প্রকাশ করার নিয়ম

- ভগ্নাংশগুলোর হরের ল.সা.গু. বের করতে হয়।
- ল.সা.গু. কে প্রত্যেক ভগ্নাংশের হর দ্বারা ভাগ করে ভাগফল বের করতে হয়।
- প্রাপ্ত ভাগফল দ্বারা সংশ্লিষ্ট ভগ্নাংশের লব ও হরকে গুণ করতে হয়।

ফর্ম-২৫, পবিত্র অক্টব্র প্রেস (দাখিল)

উদাহরণ ৪। সাধারণ হরবিংশিট ভগ্নাংশে প্রকাশ করো: $\frac{a}{4x} \cdot \frac{b}{2x^2}$

সমাধান: হর $4x$ এবং $2x^2$ এর ল.সা.গু. $4x^2$

$$\therefore \frac{a}{4x} = \frac{a \times x}{4x \times x} \quad [\because 4x^2 \div 4x = x]$$

$$= \frac{ax}{4x^2}$$

এবং $\frac{b}{2x^2} = \frac{b \times 2}{2x^2 \times 2} \quad [\because 4x^2 \div 2x^2 = 2]$

$$= \frac{2b}{4x^2}$$

\therefore সাধারণ হরবিংশিট ভগ্নাংশ দুইটি $\frac{ax}{4x^2} \cdot \frac{2b}{4x^2}$

উদাহরণ ৫। সাধারণ হরবিংশিট ভগ্নাংশে রূপান্তর করো $\frac{2}{a^2-4} \cdot \frac{5}{a^2+3a-10}$

সমাধান: ১ম ভগ্নাংশের হর $= a^2 - 4 = (a+2)(a-2)$

$$\begin{aligned} ২য় ভগ্নাংশের হর &= a^2 + 3a - 10 = a^2 - 2a + 5a - 10 \\ &= a(a-2) + 5(a-2) = (a-2)(a+5) \end{aligned}$$

হর দুইটির ল.সা.গু. $(a+2)(a-2)(a+5)$

এবার ভগ্নাংশগুলোকে সমহরবিংশিট করি।

$$\therefore \frac{2}{a^2-4} = \frac{2}{(a+2)(a-2)} = \frac{2 \times (a+5)}{(a+2)(a-2)(a+5)} \quad [\text{লব ও হরকে } (a+5) \text{ দ্বারা গুণ করে}]$$

$$= \frac{2(a+5)}{(a+2)(a-2)(a+5)} = \frac{2(a+5)}{a^2+4a+5}$$

এবং $\frac{5}{a^2+3a-10} = \frac{5}{(a-2)(a+5)} = \frac{5 \times (a+2)}{(a-2)(a+5)(a+2)} \quad [\text{লব ও হরকে } (a+2) \text{ দ্বারা গুণ করে}]$

$$= \frac{5(a+2)}{(a-2)(a+5)(a+2)} = \frac{5(a+2)}{(a^2-4)(a+5)}$$

\therefore নির্ণেয় ভগ্নাংশ দুইটি $\frac{2(a+5)}{(a^2-4)(a+5)} \cdot \frac{5(a+2)}{(a^2-4)(a+5)}$

বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের যোগ

উদাহরণ ৬। যোগ কর: $\frac{x}{a}$ এবং $\frac{y}{a}$

সমাধান: $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = \frac{x+y}{a}$

উদাহরণ ৭। যোগফল নির্ণয় কর: $\frac{3a}{2x} + \frac{b}{2y}$

সমাধান: $\frac{3a}{2x} + \frac{b}{2y} = \frac{3a \times y}{2x \times y} + \frac{b \times x}{2y \times x} = \frac{3ay+bx}{2xy} \quad [2x, 2y \text{ এর ল.সা.গু. } 2xy \text{ নিয়ে}]$

বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের বিয়োগ

উদাহরণ ৮। বিয়োগ কর $\frac{a}{x}$ থেকে $\frac{b}{x}$

সমাধান: $\frac{a}{x} - \frac{b}{x} = \frac{a-b}{x}$

উদাহরণ ৯। $\frac{2x}{3x}$ থেকে $\frac{b}{3y}$ বিয়োগ কর।

সমাধান, $\frac{2x}{3x} - \frac{b}{3y} = \frac{2xy}{3xy} - \frac{bx}{3xy} = \frac{2xy - bx}{3xy}$ [$3x, 3y$ এর লস গু $3xy$ নিয়ে]

বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের সরলীকরণ

প্রক্রিয়া চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত দুই বা ততোধিক বীজগণিতীয় ভগ্নাংশকে একটি ভগ্নাংশে বা রাশিতে পরিণত করাই হলো ভগ্নাংশের সরলীকরণ। এতে প্রাপ্ত ভগ্নাংশটিকে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ ১০। সরল করো $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}$

সমাধান: $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} = \frac{a \times (a-b) + b \times (a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{a^2 - ab + ab + b^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$

উদাহরণ ১১। সরল কর, $\frac{x+y}{xy} - \frac{y+z}{yz}$

সমাধান: $\frac{x+y}{xy} - \frac{y+z}{yz} = \frac{(x+y)yz - x(y+z)}{xyz} = \frac{yz + yz - xy - xz}{xyz} = \frac{yz - xy - xz}{xyz} = \frac{y(z-x) - xz}{xyz}$

বহু অখ্যারের সংযুক্তি

সরল সহসমীকরণ সম্পর্কে পরিপূর্ণ ধারণা পাওয়ার জন্য প্রথমে সরল সমীকরণ সম্পর্কে ধারণা থাকা দরকার

আমরা $x + 3 = 7$ সমীকরণটি লক্ষ করি:

(ক) সমীকরণটির অজ্ঞাত রাশি বা চলক কোনটি?

(খ) সমীকরণটির প্রক্রিয়া চিহ্ন কোনটি?

(গ) সমীকরণটি সরল সমীকরণ কি না?

(ঘ) সমীকরণটির মূল কত?

জেনে রাখা ভালো

যোগের ও গুণের বিনিময় বিধি, a, b এর যেকোনো মানের জন্য $a + b = b + a$ এবং $ab = ba$

গুণের বন্টন বিধি a, b, c এর যেকোনো মানের জন্য, $a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$

আমরা জানি চলক, প্রক্রিয়া চিহ্ন ও সমান চিহ্ন সংবলিত গাণিতিক বাক্যকে সমীকরণ বলে।

আর চলকের এক ঘাত বিশিষ্ট সমীকরণকে সরল সমীকরণ বলে। সরল সমীকরণ এক বা একাধিক চলকবিশিষ্ট হতে পারে।

যেমন, $x + 3 = 7$, $2y - 1 = y + 3$, $3z = 50$, $4x + 3 = x - 1$, $x + 4y - 1 = 0$,

$2x - y + 1 = x + y$ ইত্যাদি। এগুলো সরল সমীকরণের উদাহরণ। সমীকরণ সমাধান করে চলকের যে মান পাওয়া যায়, একে সমীকরণটির মূল বলে। মূলটি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। অর্থাৎ, চলকটির ঐ মান সমীকরণে বসালে সমীকরণটির দুইপক্ষ সমান হয়।

মনে রেখ : সমীকরণ সমাধানের জন্য চারটি স্বতঃসিদ্ধ আছে। এগুলো হলো

- পরস্পর সমান রাশির প্রত্যেকটির সাথে একই রাশি যোগ করলে যোগফলগুলো পরস্পর সমান হয়।
- পরস্পর সমান রাশির প্রত্যেকটি থেকে একই রাশি বিয়োগ করলে বিয়োগফলগুলো পরস্পর সমান হয়।
- পরস্পর সমান রাশির প্রত্যেকটিকে একই রাশি দ্বারা গুণ করলে গুণফলগুলো পরস্পর সমান হয়।
- পরস্পর সমান রাশির প্রত্যেকটিকে অশূন্য একই রাশি দ্বারা ভাগ করলে ভাগফলগুলো পরস্পর সমান হয়।

সমীকরণের বিধিসমূহ

(১) পক্ষান্তর বিধি :

সমীকরণ ১ এ (খ) এর ক্ষেত্রে ৫ এর

চিহ্ন পরিবর্তিত হয়ে বামপক্ষ থেকে ডানপক্ষে গেছে।

সমীকরণ ২ এ (খ) এর ক্ষেত্রে $3x$

এর চিহ্ন পরিবর্তিত হয়ে ডানপক্ষ থেকে বামপক্ষে গেছে।

$$\text{সমীকরণ ১ } x - 9 = 3$$

$$\text{সমীকরণ ২ } 4x - 3x + 7 =$$

পরবর্তী ধাপ

$$+ (ক) \quad x - 5 + 5 = 3 + 5$$

$$+ (খ) \quad x \quad 3 \quad 5$$

পরবর্তী ধাপ

$$+ (ক) \quad 4x - 3x - 3x - 7 + 3x$$

$$+ (খ) \quad 4x - 3x = 7$$

কোনো সমীকরণের যেকোনো পদকে এক পক্ষ থেকে চিহ্ন পরিবর্তন করে অপরপক্ষে সরাসরি স্থানান্তর করা যায়। এই স্থানান্তরকে বলে **পক্ষান্তর বিধি**।

উদাহরণ ১। সমাধান করো: $x + 3 = 9$

সমাধান: $x + 3 = 9$

বা, $x = 9 - 3$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $x = 6$ ∴ সমাধান: $x = 6$

(২) বর্জন বিধি :

(a) যোগের বর্জন বিধি:

সমীকরণ-১ এ (খ) এর

ক্ষেত্রে উভয়পক্ষ থেকে 3

বর্জন করা হয়েছে।

সমীকরণ-২ এ (খ) এর

ক্ষেত্রে উভয়পক্ষ থেকে -5

বর্জন করা হয়েছে।

$$\text{সমীকরণ-১ } 2x+3=a+3$$

$$\begin{aligned} &\text{পরবর্তী ধাপ} \\ &\text{(ক) } 2x+3-3=a+3-3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{(খ) } 2x=a$$

$$\text{সমীকরণ-২ } 7x-5=2a-5$$

$$\begin{aligned} &\text{পরবর্তী ধাপ} \\ &\text{(ক) } 7x-5+5=2a-5+5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{(খ) } 7x=2a$$

কোনো সমীকরণের উভয়পক্ষ থেকে একই চিহ্নযুক্ত সদৃশ পদ সরাসরি বর্জন করা যায় একে বলা হয় যোগের (বা বিয়োগের) বর্জন বিধি।

(b) গুণের বর্জন বিধি :

(খ) এর ক্ষেত্রে প্রদত্ত

সমীকরণটির উভয়পক্ষ থেকে

সাধারণ উৎপাদক সরাসরি

বর্জন করা হয়েছে।

$$\text{সমীকরণ } 4(2x+1)=4(x-2)$$

$$\begin{aligned} &\text{পরবর্তী ধাপ} \\ &\text{(ক) } \frac{4(2x+1)}{4} = \frac{4(x-2)}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{(খ) } 2x+1=x-2$$

কোনো সমীকরণের উভয়পক্ষ থেকে সাধারণ উৎপাদক সরাসরি বর্জন করা যায়। একে বলা হয় গুণের বর্জন বিধি।

উদাহরণ ২ সমাধান করে শুদ্ধ পরীক্ষা করো $4y - 5 = 2y - 1$

$$\text{সমাধান: } 4y - 5 = 2y - 1$$

$$\text{বা, } 4y - 2y = -1 + 5 \text{ [পক্ষান্তর করে]}$$

$$\text{বা, } 2y = 4$$

$$\text{বা, } y = 2 \text{ [উভয়পক্ষ থেকে সাধারণ উৎপাদক 2 বর্জন করে]}$$

$$\therefore \text{সমাধান, } y = 2$$

শুদ্ধ পরীক্ষা :

প্রদত্ত সমীকরণে y এর মান 2 বসিয়ে পাই,

$$\text{বামপক্ষ} = 4y - 5 = 4 \times 2 - 5 = 8 - 5 = 3$$

$$\text{ডানপক্ষ} = 2y - 1 = 2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \text{ডানপক্ষ}$$

 \therefore সমীকরণটির সমাধান শুদ্ধ হয়েছে।

(৩) আড়গুণন বিধি :

পরবর্তী ধাপ

$$\text{সমীকরণ } \frac{x}{2} = \frac{5}{3} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{(ক) } \frac{x}{2} \times 6 = \frac{5}{3} \times 6 \\ \rightarrow \text{(খ) } 3 \times x = 2 \times 5 \end{array}$$

উভয়পক্ষকে হর ২ ও ৩ এর ল.সা.ও ৬ দ্বারা গুণ করা হয়েছে।

সমীকরণটির (খ) এর ক্ষেত্রে লিখতে পারি,

বামপক্ষের লব \times ডানপক্ষের হর = বামপক্ষের হর \times ডানপক্ষের লব। একে বলা হয় আড়গুণন বিধি।

উদাহরণ ৩ সমাধান কর: $\frac{2x}{3} - \frac{x}{6} = -\frac{3}{4}$

সমাধান: $\frac{2x}{3} - \frac{x}{6} = -\frac{3}{4}$

বা, $\frac{4x}{6} - \frac{x}{6} = -\frac{3}{4}$ [বামপক্ষের হর ৩, ৬ এর ল.সা.ও ৬]

বা, $\frac{3x}{6} = -\frac{3}{4}$

বা, $\frac{x}{2} = -\frac{3}{4}$

বা, $4 \times x = 2 \times (-3)$ [আড়গুণন করে]

বা, $2 \times 2x = 2 \times (-3)$

বা, $2x = -3$ [উভয়পক্ষ থেকে সাধারণ উৎপাদক ২ বর্জন করে]

বা, $\frac{2x}{2} = -\frac{3}{2}$ [উভয়পক্ষকে ২ দিয়ে ভাগ করে]

বা, $x = -\frac{3}{2}$

\therefore সমাধান: $x = -\frac{3}{2}$

(4) প্রতিসাম্য বিধি :

সমীকরণ: $2x + 1 = 5x - 8$

বা, $5x - 8 = 2x + 1$

একই সাথে বামপক্ষের সবগুলো পদ ডানপক্ষে ও ডানপক্ষের সবগুলো পদ বামপক্ষে কোনো চিহ্ন পরিবর্তন না করে স্থানান্তর করা যায়। একে বলা হয় প্রতিসাম্য বিধি।

উল্লিখিত স্বতঃসিদ্ধসমূহ ও বিধিসমূহ প্রয়োগ করে একটি সমীকরণকে অপর একটি সহজ সমীকরণে রূপান্তর করে সবশেষে তা $x = a$ আকারে পাওয়া যায়। অর্থাৎ, চলক x এর মান a নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ ৪। সমাধান করো: $2(5 + x) = 16$

সমাধান: $2(5 + x) = 16$

বা, $2 \times 5 + 2 \times x = 16$ [বন্টন বিধি অনুসারে]

$$\text{বা, } 10 + 2x = 16$$

$$\text{বা, } 2x = 16 - 10 \text{ [পক্ষান্তর বিধি]}$$

$$\text{বা, } 2x = 6 \quad \text{বা, } \frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \quad \text{বা, } x = 3$$

∴ সমাধান $x = 3$

সরল সমীকরণ গঠন ও সমাধান

একজন ক্রেতা ৩ কেজি পাটালি শুড কিনতে চান। দোকানদার x কেজি ওজনের একটি বড়ো পাটালির অর্ধেক মাপলেন। কিন্তু এতে ৩ কেজির কম হলো। আরো ১ কেজি দেওয়ায় ৩ কেজি হলো। আমরা এখন বের করতে চাই, বড়ো পাটালি অর্থাৎ সম্পূর্ণ পাটালিটির ওজন কত ছিল, অর্থাৎ x এর মান কত? এ জন্য সমস্যাটি থেকে একটি সমীকরণ গঠন করতে হবে। এক্ষেত্রে সমীকরণটি হবে $\frac{x}{2} + 1 = 3$ । সমীকরণটি সমাধান করলে x এর মান পাওয়া যাবে। অর্থাৎ, শুডের সম্পূর্ণ পাটালির ওজন জানা যাবে।

কাজ প্রদত্ত তথ্য থেকে সমীকরণ গঠন করো (একটি করে দেওয়া হলো)

প্রদত্ত তথ্য	সমীকরণ
১। একটি সংখ্যা x এর পাঁচগুণ থেকে ২৫ বিয়োগ করলে বিয়োগফল হবে ১৭০	
২। পুত্রের বর্তমান বয়স y বছর, পিতার বয়স পুত্রের বয়সের চারগুণ এবং তাদের বর্তমান বয়সের সমষ্টি ৪৫ বছর।	$y + 4y = 45$
৩। একটি আয়তাকার পুকুরের দৈর্ঘ্য x মিটার, দৈর্ঘ্য অপেক্ষা প্রস্থ ৩ মিটার কম এবং পুকুরটির পরিসীমা ২৬ মিটার।	

উদাহরণ ৫। অহনা একটি পরীক্ষায় ইংরেজি ও গণিতে মোট ১৭৬ নম্বর পেয়েছে এবং ইংরেজি অপেক্ষা গণিতে ১০ নম্বর বেশি পেয়েছে। সে কোন বিষয়ে কত নম্বর পেয়েছে?

সমাধান: ধরি, অহনা ইংরেজিতে x নম্বর পেয়েছে।

সুতরাং, সে গণিতে পেয়েছে $(x + 10)$ নম্বর।

প্রশ্নমতে,

$$x + x + 10 = 176$$

$$\text{বা, } 2x + 10 = 176$$

$$\text{বা, } 2x = 176 - 10 \text{ [পক্ষান্তর করে]}$$

$$\text{বা, } 2x = 166$$

$$\text{বা, } x = \frac{166}{2} \text{ [উভয়পক্ষকে ২ দ্বারা ভাগ করে]}$$

$$\text{বা, } x = 83$$

$$\therefore x + 10 = 83 + 10 = 93$$

\therefore অহনা ইংরেজিতে পেয়েছে ৪৩ নম্বর এবং গণিতে পেয়েছে ৭৩ নম্বর।

অষ্টম অধ্যায়ের সংযুক্তি

জ্যামিতি গণিতের একটি অন্যতম প্রাচীন শাখা। 'জ্যা' অর্থ ভূমি এবং 'মিতি' অর্থ পরিমাপ। ভূমি পরিমাপের প্রয়োজন থেকেই জ্যামিতির উদ্ভব হয়েছে। গ্রিক গণিতবিদ ইউক্লিড ৩৩০ খ্রিষ্টপূর্বাব্দে 'এলিমেন্টস' নামে একটি অসাধারণ গ্রন্থ রচনা করেন। এটিকেই জ্যামিতির প্রথম পূর্ণাঙ্গ গ্রন্থ হিসেবে বিবেচনা করা হয়। এই বইয়ে তিনি কিছু সংজ্ঞা, মৌলিক ধারণা ও স্বতঃসিদ্ধের ওপর নির্ভর করে জ্যামিতিক অঙ্কন ও যুক্তি দিয়ে অঙ্কনের নির্ভুলতা প্রমাণের পদ্ধতি আবিষ্কার করেন। এই পদ্ধতি ইউক্লিডীয় পদ্ধতি এবং এই জ্যামিতি ইউক্লিডীয় জ্যামিতি নামে পরিচিত। জ্যামিতিক আলোচনার জন্য কিছু মৌলিক স্বীকার্য, সংজ্ঞা ও চিহ্নের প্রয়োজন হয়।

ইউক্লিডের সংজ্ঞা, মৌলিক ধারণা ও স্বীকার্য : ইউক্লিড তাঁর 'এলিমেন্টস' গ্রন্থের প্রথম খণ্ডের শুরুতেই বিন্দু, রেখা ও তলের সংজ্ঞা উল্লেখ করেছেন। ইউক্লিড প্রদত্ত কয়েকটি সংজ্ঞা নিম্নরূপ।

১. যার কোনো অংশ নেই, তাই বিন্দু।
 ২. রেখার প্রান্ত বিন্দু নেই।
 ৩. যার কেবল দৈর্ঘ্য আছে, কিন্তু প্রস্থ ও উচ্চতা নেই, তাই রেখা।
 ৪. যে রেখার উপরিস্থিত বিন্দুগুলো একই বরাবরে থাকে, তাই সরলরেখা।
 ৫. যার কেবল দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে, তাই তল।
 ৬. তলের প্রান্ত হলো রেখা।
 ৭. যে তলের সরলরেখাগুলো তার ওপর সমভাবে থাকে, তাই সমতল।
- যেকোনো গাণিতিক আলোচনায় এক বা একাধিক প্রাথমিক ধারণা স্বীকার করে নিতে হয়। ইউক্লিড প্রদত্ত কয়েকটি মৌলিক ধারণা হলো:
১. যে সকল বস্তু একই বস্তুর সমান, সেগুলো পরস্পর সমান।
 ২. সমান সমান বস্তুর সাথে সমান বস্তু যোগ করা হলে যোগফল সমান।
 ৩. সমান সমান বস্তু থেকে সমান বস্তু বিয়োগ করা হলে বিয়োগফল সমান।
 ৪. যা পরস্পরের সাথে মিলে যায়, তা পরস্পর সমান। ৫. পূর্ণ তার অংশের চেয়ে বড়।

জ্যামিতিতে বিন্দু, সরলরেখা ও সমতলকে প্রাথমিক ধারণা হিসাবে গ্রহণ করে এদের কিছু বৈশিষ্ট্যকে স্বীকার করে নেওয়া হয়। এই স্বীকৃত বৈশিষ্ট্যগুলোকে জ্যামিতিক স্বীকার্য বলা হয়। বাস্তব ধারণার সঙ্গে সঙ্গতি রেখেই এই স্বীকার্যসমূহ নির্ধারণ করা হয়েছে। ইউক্লিড প্রদত্ত পাঁচটি স্বীকার্য হলো:

স্বীকার্য ১. একটি বিন্দু থেকে অন্য একটি বিন্দু পর্যন্ত একটি সরলরেখা আঁকা যায়।




স্বীকার্য ২. ঋণাত্মক রেখাকে যথেষ্টভাবে বাড়ানো যায়।

স্বীকার্য ৩. যেকোনো কেন্দ্র ও যেকোনো ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকা যায়।

স্বীকার্য ৪. সকল সমকোণ পরস্পর সমান।

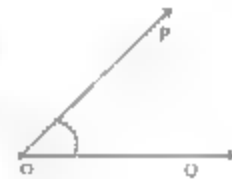
স্বীকার্য ৫. একটি সরলরেখা দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করলে এবং ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের চেয়ে কম হলে, রেখা দুইটিকে যথেষ্টভাবে বর্ধিত করলে যদিকে কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের চেয়ে কম, সেদিকে মিলিত হয়।

রেখা, রেখাংশ ও রশ্মি : কাগজের উপর A ও B দ্বারা নির্দেশিত দুইটি বিন্দু বিবেচনা করি। বিন্দু দুইটির উপর একটি স্কেল রেখে A থেকে B পর্যন্ত দাগ টানি। AB একটি সরলরেখার অংশের প্রতিক্রম অর্থাৎ AB একটি রেখাংশ (চিত্র-১)। রেখাংশটিকে উভয় দিকে যতদূর খুলি বাড়ালেই একটি সরলরেখার প্রতিক্রম পাওয়া যায়। রেখার নির্দিষ্ট প্রান্তবিন্দু বা দৈর্ঘ্য নেই (চিত্র-২)। আর A থেকে B এর দিকে রেখাটির সীমাহীন অংশ একটি রশ্মি। একে AB রশ্মি বলে (চিত্র-৩)।

রেখাংশ	রেখা	রশ্মি
রেখাংশের নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য আছে। এবং এর দুটি প্রান্তবিন্দু নেই, এর প্রান্তবিন্দুও নেই। আছে।	একটি রেখার নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য নেই। একটি রেখার নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য নেই। এবং এর দুটি প্রান্তবিন্দু নেই, এর প্রান্তবিন্দুও নেই। আছে।	একটি রশ্মির নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য নেই। একটি রশ্মির নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য নেই। এবং এর দুটি প্রান্তবিন্দু নেই, এর প্রান্তবিন্দুও নেই। আছে।
 (চিত্র-১)	 (চিত্র-২)	 (চিত্র-৩)

কোণ

একই সমতলে দুইটি রশ্মি একটি বিন্দুতে মিলিত হলে কোণ তৈরি হয়। রশ্মি দুইটিকে কোণের বাহু এবং তাদের সাধারণ বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু বলে। পাশের চিত্রে, OP ও OQ রশ্মিদ্বয় তাদের সাধারণ প্রান্তবিন্দুতে $\angle POQ$ উৎপন্ন করেছে। O বিন্দুটি $\angle POQ$ এর শীর্ষবিন্দু।



সরলকোণ : একটি কোণ 180° এর সমান হলে তাকে সরলকোণ বলে। চিত্রে $\angle BAC$ একটি সরলকোণ।

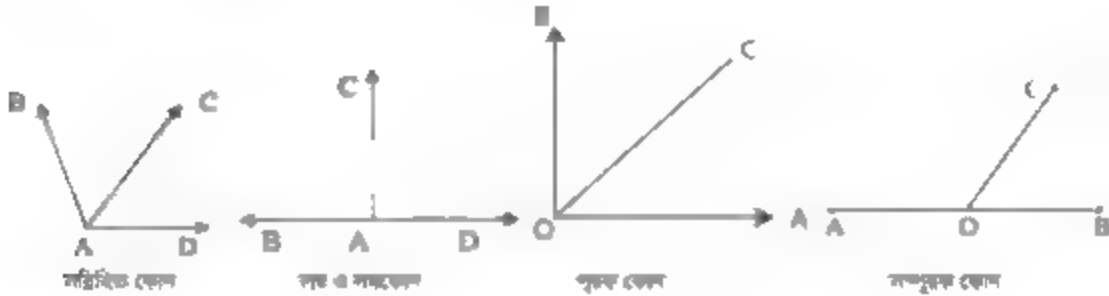


সম্মিহিত কোণ : যদি কোনো তলে দুইটি কোণের একই শীর্ষবিন্দু হয় এবং কোণদ্বয় সাধারণ বাহুর বিপরীত পাশে অবস্থান করে, তবে ঐ কোণদ্বয়কে সম্মিহিত কোণ বলে।

পূরক কোণ: দুটি সম্মিহিত কোণের যোগফল 90° হলে, কোণ দুটির একটি অপরের পূরক কোণ।

লম্ব ও সমকোণ: যদি একই রেখার উপর অবস্থিত দুটি সম্মিহিত কোণ পরস্পর সমান হয়, তবে কোণ দুটির প্রত্যেকটি এক একটি সমকোণ হবে। সমকোণের বাহু দুটি পরস্পরের উপর লম্ব।

সম্পূরক কোণ: দুটি সম্মিহিত কোণের যোগফল 180° হলে, কোণ দুটির একটি অপরের সম্পূরক কোণ।



জ্যামিতিক যুক্তি শক্তি

প্রতিজ্ঞা : জ্যামিতিতে যে সকল বিষয়ের আলোচনা করা হয়, সাধারণভাবে তাদের প্রতিজ্ঞা বলা হয়।

সম্পাদন : যে প্রতিজ্ঞায় কোনো জ্যামিতিক বিষয় অঙ্কন করে দেখানো হয় এবং যুক্তি দ্বারা অঙ্কনের নির্ভুলতা প্রমাণ করা যায়, একে সম্পাদন বলা হয়।

সম্পাদনের বিভিন্ন অংশ

(ক) উপাত্ত : সম্পাদ্যে যা দেওয়া থাকে, তাই উপাত্ত।

(খ) অঙ্কন : সম্পাদ্যে যা করণীয়, তাই অঙ্কন।

(গ) প্রমাণ : যুক্তি দ্বারা অঙ্কনের নির্ভুলতা যাচাই হলো প্রমাণ।

উপপাদ্য : যে প্রতিজ্ঞায় কোনো জ্যামিতিক বিষয়কে যুক্তি দ্বারা প্রতিষ্ঠিত করা হয়, তাকে

উপপাদ্য বলে

উপপাদ্যের বিভিন্ন অংশ

(ক) সাধারণ নির্বচন - এ অংশে প্রতিজ্ঞার বিষয়টি সরলভাবে বর্ণনা করা হয়।

(খ) বিশেষ নির্বচন - এ অংশে প্রতিজ্ঞার বিষয়টি চিত্র দ্বারা বিশেষভাবে দেখানো হয়

(গ) অঙ্কন : এ অংশে প্রতিজ্ঞা সমাধানের বা প্রমাণের জন্য অতিরিক্ত অঙ্কন করতে হয়।

(ঘ) প্রমাণ : এ অংশে স্বতঃসিদ্ধগুলো এবং পূর্বে গঠিত জ্যামিতিক সত্য ব্যবহার করে উপযুক্ত যুক্তি দ্বারা প্রস্তাবিত বিষয়টিকে প্রতিষ্ঠিত করা হয়।

অনুসিদ্ধান্ত , কোনো জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞা প্রতিষ্ঠিত করে এর সিদ্ধান্ত থেকে এক বা একাধিক যে নতুন সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা যায়, এদেরকে অনুসিদ্ধান্ত বলা হয়।

ছেদক

কোনো সরলরেখা দুই বা ততোধিক সরলরেখাকে

বিভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করলে একে ছেদক বলে চিত্রে,

AB ও CD দুইটি সরলরেখা, LM সরলরেখাকে

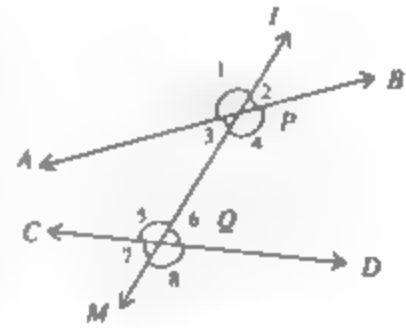
যথাক্রমে দুইটি ভিন্ন বিন্দু P, Q তে ছেদ করেছে।

এখানে LM সরলরেখা AB ও CD সরলরেখাদ্বয়ের

ছেদক ছেদকটি AB ও CD সরলরেখা দুইটির সাথে

মোট আটটি কোণ তৈরি করেছে। কোণগুলোকে

$\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6, \angle 7, \angle 8$ দ্বারা নির্দেশ করি। কোণগুলোকে অন্তঃস্থ ও বহিঃস্থ, অনুরূপ ও একান্তর এই চার শ্রেণিতে ভাগ করা যায়।



অন্তঃস্থ কোণ	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
বহিঃস্থ কোণ	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
অনুরূপ কোণ জোড়া	$\angle 1$ এবং $\angle 5, \angle 2$ এবং $\angle 6, \angle 3$ এবং $\angle 7, \angle 4$ এবং $\angle 8$
অন্তঃস্থ একান্তর কোণ জোড়া	$\angle 3$ এবং $\angle 6, \angle 4$ এবং $\angle 5$
বহিঃস্থ একান্তর কোণ জোড়া	$\angle 1$ এবং $\angle 8, \angle 2$ এবং $\angle 7$
ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণ জোড়া	$\angle 3$ এবং $\angle 5, \angle 4$ এবং $\angle 6$

অনুরূপ কোণগুলোর বৈশিষ্ট্য: (ক) কোণের কৌণিক বিন্দু আলাদা (খ) ছেদকের একই পাশে অবস্থিত।

একান্তর কোণগুলোর বৈশিষ্ট্য: (ক) কোণের কৌণিক বিন্দু আলাদা (খ) ছেদকের বিপরীত পাশে অবস্থিত।

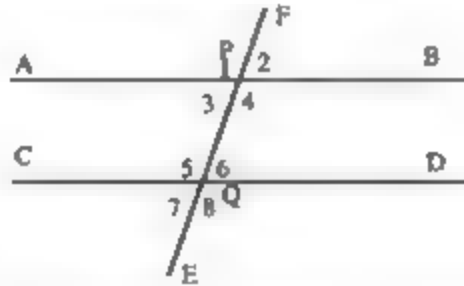
সমান্তরাল সরলরেখা

আমরা জেনেছি যে, একই সমতলে অবস্থিত দুইটি সরলরেখা একে অপরকে ছেদ না করলে সেগুলো সমান্তরাল সরলরেখা। দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা থেকে যেকোনো দুইটি রেখাংশ নিলে, রেখাংশ দুইটিও পরস্পর সমান্তরাল হয়। দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার একটির যেকোনো বিন্দু থেকে অপরটির লম্বদূরত্ব সর্বদা সমান। আবার দুইটি সরলরেখার একটির যেকোনো দুইটি বিন্দু থেকে অপরটির লম্ব দূরত্ব পরস্পর সমান হলেও রেখাদ্বয় সমান্তরাল। এই লম্বদূরত্বকে দুইটি সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের দূরত্ব বলা হয়। l ও m দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা।



লক্ষ করি, কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর অবস্থিত নয় একপ বিন্দুর মধ্য দিয়ে ঐ সরলরেখার সমান্তরাল করে একটি মাত্র সরলরেখা আঁকা যায়।

সমান্তরাল সরলরেখার ছেদক দ্বারা উৎপন্ন কোণসমূহ



উপরের চিত্রে, AB ও CD দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা এবং EF সরলরেখাগুলোকে যথাক্রমে দুইটি বিন্দু P ও Q তে ছেদ করেছে। EF সরলরেখা AB ও CD সরলরেখাদ্বয়ের ছেদক। ছেদকটি AB ও CD সরলরেখা দুইটির সাথে $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6, \angle 7, \angle 8$ মোট আটটি কোণ তৈরি করেছে। এ কোণগুলোর মধ্যে

(ক) $\angle 1$ এবং $\angle 5$, $\angle 2$ এবং $\angle 6$, $\angle 3$ এবং $\angle 7$, $\angle 4$ এবং $\angle 8$ পরস্পর অনুরূপ কোণ।

(খ) $\angle 3$ এবং $\angle 6, \angle 4$ এবং $\angle 5$ হলো পরস্পর একান্তর কোণ।

(গ) $\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$ অভ্যন্তর কোণ।

দুইটি সরলরেখার একটি ছেদক দ্বারা উৎপন্ন একান্তর বা অনুরূপ কোণ জোড়া সমান হলে রেখাগুলি সমান্তরাল।

উপপাদ্য ১। দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে একটি সরলরেখা ছেদ করলে একান্তর কোণ জোড়া সমান।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $AB \parallel CD$ এবং

PQ ছেদক তাদের মধ্যাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে,
 $\angle AEF =$ একান্তর $\angle EFD$ ।

প্রমাণ:

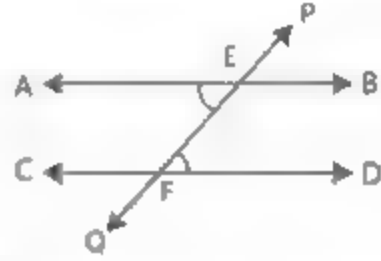
ধাপ:

(১) $\angle PEB =$ অনুরূপ $\angle EFD$

(২) $\angle PEB =$ বিপ্রতীপ $\angle AEF$

$\angle AEF = \angle EFD$

[প্রমাণিত]



ব্যর্থ্যতা

[সমান্তরাল রেখার সংজ্ঞানুসারে অনুরূপ কোণ

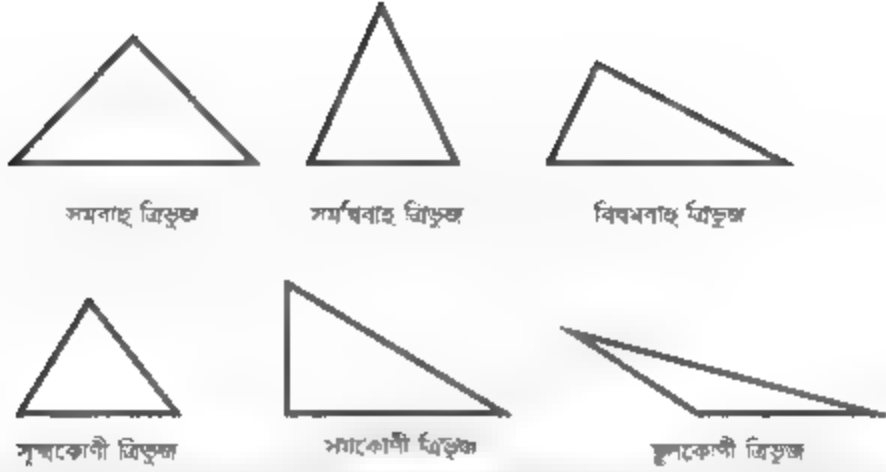
সমান]

[বিপ্রতীপ কোণদ্বয় পরস্পর সমান।

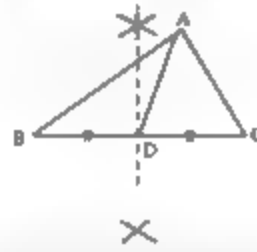
[(১) ও (২) থেকে]

ত্রিভুজ

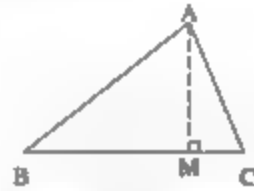
তিনটি রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ জ্যামিতিক কাঠামোকে ত্রিভুজ বলা হয় এবং রেখাংশগুলোকে ত্রিভুজের বাহু বলে। যেকোনো দুইটি বাহুর সাধারণ বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু বলা হয়। দুইটি বাহু শীর্ষবিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে তা ত্রিভুজের একটি কোণ। একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ আছে। বাহুভেদে ত্রিভুজ তিন প্রকার: সমবাহু, সমদ্বিবাহু ও বিষমবাহু। আবার কোণভেদেও ত্রিভুজ তিন প্রকার, সূক্ষ্মকোণী, স্থূলকোণী ও সমকোণী। ত্রিভুজের বাহু তিনটির দৈর্ঘ্যের সমষ্টিকে ত্রিভুজের পরিসীমা বলা হয়।



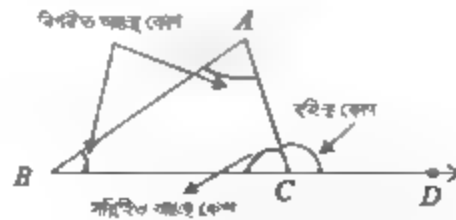
ত্রিভুজের যেকোনো শীর্ষবিন্দু থেকে এর বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশকে মধ্যমা বলে। নীচের চিত্রে AD , ABC ত্রিভুজের একটি মধ্যমা।



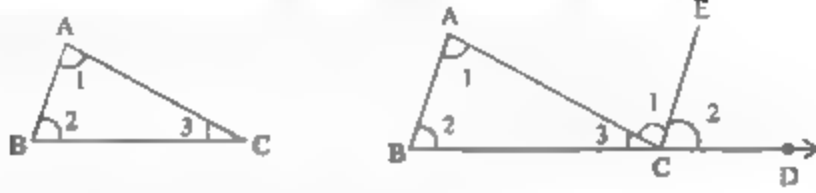
ত্রিভুজের যেকোনো শীর্ষবিন্দু হতে এর বিপরীত বাহুর লম্ব দূরত্বই ত্রিভুজের উচ্চতা নির্দেশ করে। নীচের চিত্রে AM , ABC ত্রিভুজের উচ্চতা।



কোনো ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে কোণ উৎপন্ন হয় তা ত্রিভুজটির একটি বহিঃস্থ কোণ। এই কোণের সম্মিহিত কোণটি ছাড়া ত্রিভুজের অপর দুইটি কোণকে এই বহিঃস্থ কোণের বিপরীত অন্তঃস্থ কোণ বলা হয়।



উপপাদ্য ২ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB =$ দুই সমকোণ।

অঙ্কন: BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করি এবং BA রেখার সমান্তরাল করে CE রেখা আঁকি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) $\angle BAC = \angle ACE$	[$BA \parallel CE$ এবং AC রেখা তাদের ছেদক।] [\therefore একান্তর কোণ দুইটি সমান।]
(২) $\angle ABC = \angle ECD$	[$BA \parallel CE$ এবং BD রেখা তাদের ছেদক।] [\therefore অনুরূপ কোণ দুইটি সমান।]
(৩) $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACE + \angle ECD = \angle ACD$	
(৪) $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \angle ACD + \angle ACB$	[উভয়পক্ষে $\angle ACB$ যোগ করে]
(৫) $\angle ACD + \angle ACB =$ দুই সমকোণ	[সরল কোণ]
$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB =$ দুই সমকোণ।	[প্রমাণিত]

অনুসিদ্ধান্ত ১ ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা এর বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

অনুসিদ্ধান্ত ২ ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয় পরস্পর পূরক।

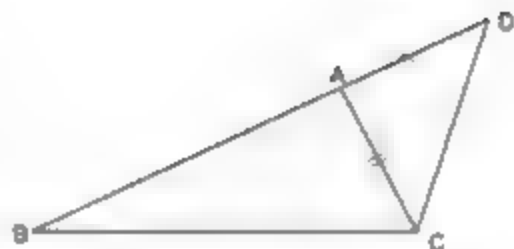
অনুসিদ্ধান্ত ৪ সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণের পরিমাপ 60°

উপপাদ্য ৩। ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি এর তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিশেষ নির্বচন: ধরি $\triangle ABC$ -এ BC বৃহত্তম বাহু। প্রমাণ করতে হবে যে $(AB + AC) > BC$

অঙ্কন: BA কে D পর্যন্ত বর্ধিত করি, যেন $AD = AC$ হয়। C, D যোগ করি।

প্রমাণ :



ধাপ	যথার্থতা
(১) $\triangle ADC$ এ $AD = AC$ $\therefore \angle ACD = \angle ADC$ $\therefore \angle ACD = \angle BDC$	[সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহু সংলগ্ন কোণদ্বয় সমান]
(২) $\angle BCD > \angle ACD$ $\angle BCD > \angle BDC$	[কারণ $\angle ACD, \angle BCD$ এর একটি অংশ।]
(৩) $\triangle BCD$ এ $\angle BCD > \angle BDC$ $\therefore BD > BC$	[বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু বৃহত্তর।]
(৪) কিন্তু $BD = AB + AD = AB + AC$ $(AB + AC) > BC$ (প্রমাণিত)	[যেহেতু $AC = AD$]

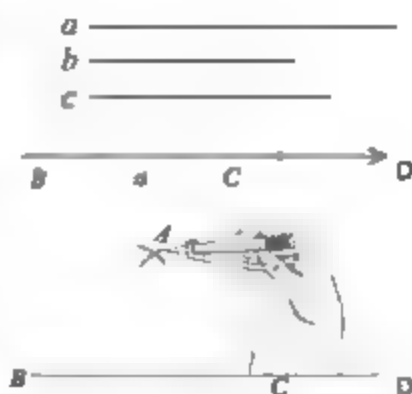
ত্রিভুজ অঙ্কন : প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বাহু এবং তিনটি কোণ আছে। এদের মধ্যে নিচের উপাত্তগুলো জানা থাকলে একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ সহজেই আঁকা যায়:

- (১) তিনটি বাহু
- (২) দুইটি বাহু ও এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ
- (৩) একটি বাহু ও এর সংলগ্ন দুইটি কোণ
- (৪) দুইটি কোণ ও এর একটির বিপরীত বাহু
- (৫) দুইটি বাহু ও এর একটির বিপরীত কোণ
- (৬) সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর একটি বাহু অথবা কোণ।

সম্পাদ্য ১ :

কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করি, একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু a, b, c দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



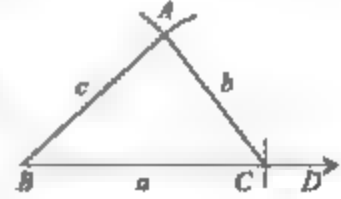
অঙ্কন, (১) যেকোনো রশ্মি BD থেকে a এর সমান করে BC কেটে নিই।

(২) B ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c এবং b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BC এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে।

(৩) A, B এবং A, C যোগ করি। তাহলে $\triangle ABC$ -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কনানুসারে, $\triangle ABC$ -এ $BC = a$, $AB = c$ এবং $AC = b$

$\therefore \triangle ABC$ প্রদত্ত বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজ।



মন্তব্য, ত্রিভুজের দুই বাহুর সমষ্টি এর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। তাই প্রদত্ত বাহুগুলো এমন হতে হবে যে, যেকোনো দুইটির দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয়টির দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর হয়। তাহলেই ত্রিভুজটি আঁকা সম্ভব হবে।

সম্পাদ্য ২

কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহু ও এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করি, একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু a ও b এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle x$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন,

(১) যেকোনো রশ্মি BD থেকে a এর সমান করে BC নিই।

(২) BC রেখাংশর C বিন্দুতে প্রদত্ত $\angle x$ এর সমান $\angle BCE$ আঁকি।

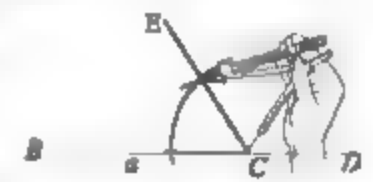
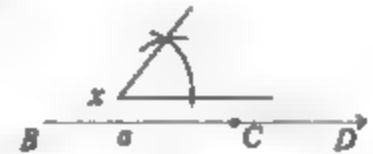
(৩) CE রেখাংশ থেকে b এর সমান করে CA নিই। A, B যোগ করি।

তাহলে $\triangle ABC$ -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে,

$\triangle ABC$ -এ $BC = a$, $CA = b$ এবং $\angle ACB = \angle x$

$\therefore \triangle ABC$ ই নির্দিষ্ট ত্রিভুজ।



সম্পাদ্য ৩

কোনো ত্রিভুজের একটি বাহু ও এর সংলগ্ন দুইটি কোণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে মনে করি, একটি ত্রিভুজের একটি বাহু a এবং এর সংলগ্ন দুইটি কোণ $\angle x$ ও $\angle y$ দেওয়া আছে ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন:

(১) যেকোনো রশ্মি BD থেকে a এর সমান করে BC নিই

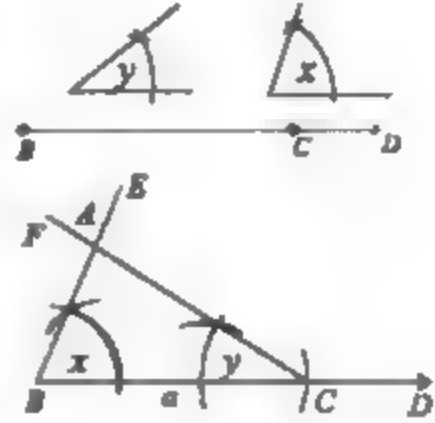
(২) BC রেখাংশের B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে $\angle x$ এবং $\angle y$ এর সমান করে $\angle CBE$ এবং $\angle BCF$ আঁকি। BE ও CF পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে $\triangle ABC$ -ই নির্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে,

$\triangle ABC$ -এ $BC = a$, $\angle ABC = \angle x$ এবং $\angle ACB = \angle y$

$\triangle ABC$ -ই নির্দিষ্ট ত্রিভুজ।



মন্তব্য: ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান, তাই প্রদত্ত কোণ দুইটি এমন হতে হবে যেন এদের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ছোট হয়। এই শর্ত পালন করা না হলে কোনো ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব হবে না।

সর্বসমতা ও সদৃশতা

আমাদের চারদিকে বিভিন্ন আকৃতি ও আকারের বস্তু দেখতে পাই। এদের কিছু ছবছ সমান, আবার কিছু দেখতে একই রকম, কিন্তু সমান নয়। তোমাদের শ্রেণির শিক্ষার্থীদের প্রত্যেকের গণিত পাঠ্যপুস্তকটি আকৃতি, আকার ও গুণে একই, সেগুলো সর্বদিক দিয়ে সমান বা সর্বসম। আবার একটি গাছের পাতাগুলোর আকৃতি একই হলেও আকারে ভিন্ন, পাতাগুলো দেখতে এক রকম বা সদৃশ। ফটোগ্রাফির দোকানে যখন আমরা মূলকর্পির অতিরিক্ত কপি চাই তা মূলকর্পির ছবছ সমান, বড় বা ছোট করে চাইতে পারি। কপিটি যদি মূলকর্পির সমান হয় সেক্ষেত্রে কপি দুইটি সর্বসম। কপিটি যদি মূলকর্পির চেয়ে বড় বা ছোট হয় সেক্ষেত্রে কপি দুইটি সদৃশ কিন্তু সর্বসম নয়। এই অধ্যায়ে আমরা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ এই দুই জ্যামিতিক

ধারণা নিয়ে আলোচনা করব। আমরা আপাতত সমতলীয় ক্ষেত্রের সর্বসমতা ও সদৃশতা বিবেচনা করব।

সর্বসমতা

নিচের সমতলীয় চিত্র দুইটি দেখতে একই আকৃতি ও আকারের। চিত্র দুইটি সর্বসম কিনা নিশ্চিত হওয়ার জন্য উপরিপাতন পদ্ধতি গ্রহণ করা যায়। এ পদ্ধতিতে প্রথম চিত্রের একটি অনুরূপ কপি করে দ্বিতীয়টির উপর রাখি। যদি চিত্রগুলো পরস্পরকে সম্পূর্ণরূপে আবৃত করে, তবে এরা সর্বসম। চিত্র F_1 , চিত্র F_2 এর সর্বসম হলে আমরা $F_1 \cong F_2$ দ্বারা প্রকাশ করি।



দুইটি রেখাংশ কখন সর্বসম হবে?

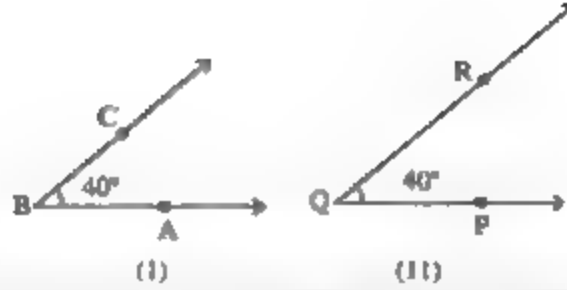
চিত্রে দুই জোড়া রেখাংশ আঁকা হয়েছে। উপরিপাতন পদ্ধতিতে AB এর অনুরূপ কপি CD এর উপর রেখে দেখি যে, AB রেখাংশ CD রেখাংশকে ঢেকে দিয়েছে এবং A ও B বিন্দু যথাক্রমে C ও D বিন্দুর উপর পতিত হয়েছে। সুতরাং রেখাংশ দুইটি সর্বসম। একই কাজ দ্বিতীয় জোড়া সরলরেখার জন্য করে দেখি যে, রেখাংশ দুইটি সর্বসম নয়। লক্ষ করি, কেবল প্রথম জোড়া রেখাংশের দৈর্ঘ্য সমান।



দুইটি রেখাংশের দৈর্ঘ্য সমান হলে রেখাংশ দুইটি সর্বসম। আবার বিপরীতভাবে, দুইটি রেখাংশ সর্বসম হলে এদের দৈর্ঘ্য সমান।

দুইটি কোণ কখন সর্বসম হবে?

চিত্রে 40° দুইটি কোণ আঁকা হয়েছে। উপরিপাতন পদ্ধতি গ্রহণ করে প্রথম চিত্রের একটি অনুরূপ কপি করে দ্বিতীয়টির উপর রাখি। B বিন্দু Q বিন্দুর উপর এবং BA রশ্মি QP রশ্মির ওপর পতিত হয়েছে। লক্ষ করি, কোণ দুইটির পরিমাপ সমান বলে BC রশ্মি QR রশ্মির উপর পতিত হয়েছে। অর্থাৎ $\angle ABC \cong \angle PQR$



দুইটি কোণের পরিমাপ সমান হলে কোণ দুইটি সর্বসম আবার বিপরীতভাবে, দুইটি কোণ সর্বসম হলে এদের পরিমাপও সমান।

ত্রিভুজের সর্বসমতা

একটি ত্রিভুজকে অপর একটি ত্রিভুজের উপর স্থাপন করলে যদি ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে মিলে যায়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয়। সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু ও অনুরূপ কোণগুলো সমান। নিচের $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সর্বসম।

$\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সর্বসম হলে এবং

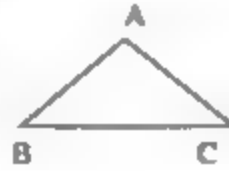
A, B, C শীর্ষ যথাক্রমে D, E, F শীর্ষের

উপর পতিত হলে $AB = DE, AC =$

$DF, BC = EF,$

$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

হবে।



$\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সর্বসম বোঝাতে $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ লেখা হয়

উপপাদ্য ১ (বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য)

যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই বাহুর সমান হয় এবং বাহু

দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ দুইটি পরস্পর সমান

হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয়।

বিশেষ নির্বচন মনে করি,

$\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এ $AB = DE, AC = DF$

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle BAC =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle EDF$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



প্রমাণ :

খাপ	যথার্থতা
(১) $\triangle ABC$ কে $\triangle DEF$ এর উপর এমনভাবে স্থাপন করি যেন A বিন্দু D বিন্দুর উপর ও AB বাহু DE বাহু বরাবর এবং DE বাহুর যে পাশে F আছে C বিন্দু ঐপাশে পড়ে। এখন $AB = DF$ বলে B বিন্দু অবশ্যই E বিন্দুর উপর পড়বে।	[বাহুর সর্বসমতা] [কোণের সর্বসমতা]
(২) যেহেতু $\angle BAC = \angle EDF$ এবং AB বাহু DE বাহুর উপর পড়ে, সুতরাং AC বাহু DF বাহু বরাবর পড়বে।	[বাহুর সর্বসমতা]
(৩) $AC = DF$ বলে C বিন্দু অবশ্যই F বিন্দুর উপর পড়বে।	[দুইটি বিন্দুর মধ্য দিয়ে একটি মাত্র সরলরেখা অঙ্কন করা যায়]
(৪) এখন B বিন্দু E বিন্দুর উপর এবং C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়ে বলে BC বাহু অবশ্যই EF বাহুর সাথে পুরোপুরি মিলে যাবে।	
অতএব, $\triangle ABC, \triangle DEF$ এর উপর সমাপত্তিত হবে। $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (প্রমাণিত)	

উপপাদ্য ২

যদি কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান হয়, তবে এদের বিপরীত কোণ দুইটিও পরস্পর সমান হবে।

বিশেষ নির্বাচন: মনে করি, ABC ত্রিভুজে $AB = AC$ ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABC = \angle ACB$ ।

অঙ্কন: $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD অঁকি যেন তা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ: $\triangle ABD$ এবং $\triangle ACD$ এ

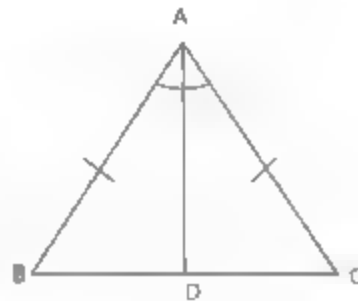
(১) $AB = AC$ (প্রদত্ত)

(২) AD সাধারণ বাহু এবং

(৩) অন্তর্ভুক্ত $\angle BAD =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle CAD$ (অঙ্কনানুসারে)

সুতরাং, $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

$\angle ABD = \angle ACD$ অর্থাৎ, $\angle ABC = \angle ACB$ (প্রমাণিত)



উপপাদ্য ৩ (বাহু-বাহু-বাহু উপপাদ্য)

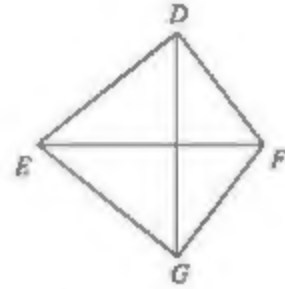
যদি একটি ত্রিভুজের তিন বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, $\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$ এ $AB = DE, AC = DF$ এবং $BC = EF$,

প্রমাণ করতে হবে যে, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

প্রমাণ: মনে করি, BC এবং EF

বাহু যথাক্রমে $\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$ এর বৃহত্তম বাহুদ্বয়। এখন $\triangle ABC$ কে $\triangle DEF$ এর উপর এমনভাবে স্থাপন করি, যেন B বিন্দু E বিন্দুর উপর ও BC বাহু



EF বাহু বরাবর এবং EF রেখার যে পাশে D বিন্দু আছে, A বিন্দু এর বিপরীত পাশে পড়ে।

মনে করি, G বিন্দু A বিন্দুর নতুন অবস্থান।

যেহেতু $BC = EF, C$ বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়বে। সুতরাং $\triangle GEF$ হবে $\triangle ABC$ এর নতুন অবস্থান। অর্থাৎ, $EG = BA, FG = CA$ ও $\angle EGF = \angle BAC$. D, G যোগ করি।

ধাপ	মত্বার্থতা
(১) $\triangle EGD$ এ $EG = ED$ [কারণ $EG = BA = ED$]	[ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের বিপরীত কোণ পরস্পর সমান]
অতএব, $\angle EDG = \angle EGD$	
(২) $\triangle FGD$ এ $FG = FD$	[ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সমান]
অতএব, $\angle FDG = \angle FGD$.	
(৩) সুতরাং, $\angle EDG + \angle FDG = \angle EGD + \angle FGD$	
বা, $\angle EDF = \angle EGF$	
অর্থাৎ, $\angle BAC = \angle EDF$	
অতএব, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ -এ $AB = DE, AC = DF$	
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle BAC =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle EDF$	[বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (প্রমাণিত)।	

উপপাদ্য ৪ (কোণ-বাহু-কোণ উপপাদ্য)

যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও কোণ সংলগ্ন বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও কোণ সংলগ্ন বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি,

$\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ -এ $\angle B = \angle E$,
 $\angle C = \angle F$ এবং কোণ সংলগ্ন BC
 বাহু = অনুরূপ EF বাহু। প্রমাণ
 করতে হবে যে, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$
 প্রমাণ:

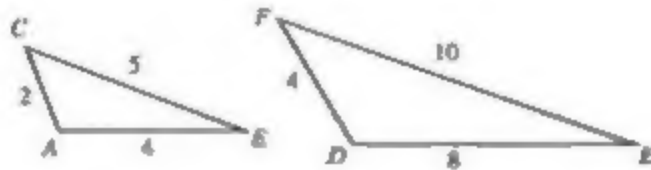


ধাপ	যথার্থতা
(১) $\triangle ABC$ কে $\triangle DEF$ এর উপর এমনভাবে স্থাপন করি যেন, B বিন্দু E বিন্দুর উপর ও BC বাহু EF বাহু বরাবর এবং EF রেখার যে পাশে D আছে বিন্দু A বিন্দু যেন ঐপাশে পড়ে। যেহেতু $BC = EF$, অতএব C বিন্দু F বিন্দুর উপর অবশ্যই পড়বে। (২) আবার, $\angle B = \angle E$ বলে, BA বাহু ED বাহু বরাবর পড়বে এবং $\angle C = \angle F$ বলে, CA বাহু FD বাহু বরাবর পড়বে। (৩) BA এবং CA বাহুর সাধারণ বিন্দু A , BD ও FD বাহুর সাধারণ বিন্দু D এর উপর পড়বে। অর্থাৎ, $\triangle ABC, \triangle DEF$ এর উপর সমাপতিত হবে। $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (প্রমাণিত)	[বাহুর সর্বসমতা।] [কোণের সর্বসমতা]

ত্রিভুজের সদৃশতার শর্ত

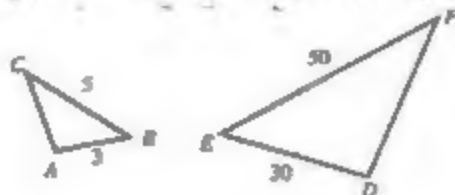
শর্ত ১। (বাহু-বাহু-বাহু)

যদি একটি ত্রিভুজের তিন বাহু অপর একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর সমানুপাতিক হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ।



শর্ত ২। (বাহু-কোণ-বাহু)

যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই বাহুর সমানুপাতিক হয় এবং বাহু দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ দুইটি পরস্পর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ।



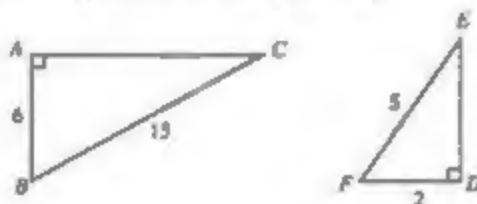
শর্ত ৩। (কোণ-কোণ)

যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির দুইটি কোণ যথাক্রমে অপরটির দুইটি কোণের সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ।



শর্ত ৪। (অতিভুজ-বাহু)

যদি দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের একটির অতিভুজ ও একটি বাহু যথাক্রমে অপরটির অতিভুজ ও অনুরূপ বাহুর সমানুপাতিক হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ।



সমাধি

২০২৫ শিক্ষাবর্ষ

দাখিল অষ্টম-গণিত

বিদ্যা পরম ধন।

তথ্য, সেবা ও সামাজিক সমস্যা প্রতিকারের জন্য '৩৩৩' কলসেফীয়ে ফোন করুন

নারী ও শিশু নির্যাতনের ঘটনা ঘটলে প্রতিকার ও প্রতিরোধের জন্য ন্যাশনাল হেল্পলাইন সেন্টারের
১০৯ নম্বর-এ (টোল ফ্রি, ২৪ ঘণ্টা সার্ভিস) ফোন করুন

গণপ্রজাতন্ত্রী বাংলাদেশ সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য।